TIDSKRIFT
FÖR
ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

1929—1930

TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

C. E. BLOM, C. O. G. BORELIUS,
J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

TRETTONDE ÅRGÅNGEN

1929—1930

STOCKHOLM

ALBERT BONNIERS FÖRLAG
(Svenska Bokförlaget)

STOCKHOLM
ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1930

Trettonde årgångens innehåll.

Sid.

BENNER, S. En enkel metod att bestämma omsättningsförhållandet hos förstärkartransformatorer ... 161
— — Anm. av *Helge Holst og H. A. Kramers*, Bohrs Atomteori ... 164
BERGHOLM, C. Anm. av *Kosmos*, Bd. 7 ... 162
BLOM, C. E. Anm. av *C. G. Hellsten*, Experimentell fysik och astronomi, del I och *Ivar J:son Malmborg*, Övnings- och lärobok i fysik för realskolan, del I ... 109
— — Anm. av *Meddelande om ny materiell* från P. A. Norstedt & Söners skolmateriellavdelning, häftena 6 och 7 ... 112, 239
— — Om kursen i sannolikhetsräkning ... 203
— — Om en matematisk studentuppgift ... 250
BOLINDER, G. Om den matematiska behandlingen av ett tidsfördriv ... 88
BORELIUS, G. Vad karakteriserar en metall? ... 138
DE BRUN, F. Generaliseringar av medianer och bissektriser i trianglar 132
BÅGMAN, S. Minimideviationen vid ett prisma ... 228
— — Anm. av *S. Jarl*, Repetitionskurs i algebra ... 240
BÄCKSTRÖM, H. Kvicksilverhalogenidernas elektrolytiska dissociation... 23
— — Det fotografiska omvändningsförfarandet vid framställning av positiva bilder ... 147
EDQVIST, T. Små gasblåsors stighastighet i vatten ... 19
FAXÉN, H. Materievågen ... 205
GUNNESON, F. En kalorimeter av massiv koppar för skolbruk ... 102
GÖRANSSON, EDV. Sannolikhetsräkning på empirisk grundval ... 193
HEDSTRÖM, J. S. Elevernas enskilda arbete ... 159
HENNICHS, S. Biokemiska arbetsmetoder och problem (forts.) ... 25
— — Biokemiska försök ... 97
JONZON, B. Über die Gruppen birationaler Transformationen der elliptischen und der hyperelliptischen Kurven in sich (ref. av gradualavh.) ... 242
JOSEPHSON, KARL. Nobelpristagarna i kemi, Arthur Harden och Hans von Euler ... 77
JOSEPHSON, OLOF. Några reflexioner beträffande latingymnasiets nya matematikkurser ... 1
— — Anm. av *K.-G. Hagström*, Talens vetenskap ... 38
— — Anm. av biografier över N. H. Abel och Isaac Newton ... 39

Sid.

KIESSLING, F. Eine Methode zur approximativen Berechnung einseitig eingespannter Druckstäbe mit veränderlichem Querschnitt (ref. av gradualavh.) ... 242

LARSSON, A. Experimentelle Untersuchungen über die Dispersion der Röntgenstrahlen (ref. av gradualavh.) ... 48

LINDWALL, B. Anm. av *S. Lemoine*, Från mikrofonen till högtalaren 236

LUNDBLAD, R. Fysikaliska uppgifter ... 59, 184

LÖWENHAMN, E. Kromnickeltråd ... 232

NILSSON, E. Apparat för Benzenbergs fallförsök ... 229

NYSTRÖM, B. E. Anm. av *Rydberg-Wahlström*, Matematiska uppgifter i studentexamen på latinlinjen ... 106

— — Anm. av *Hedström-Öije*, Aritmetik och ekvationslära och av *Rendahl-Wahlström-Frank*, Räknebok för realskolan ... 166

— — Anm. av *Collin-Ohlon*, Lärobok i plan trigonometri ... 168

PARCK, K. Metoder att bestämma luftens syrehalt ... 151

PETRINI, H. En lek med siffror ... 10

— — Formen på en enkel knut ... 104

— — Nytt bevis för Euklides I: 16 och 17 ... 230

PETTERSSON, J. P. Anm. av *O. Josephson*, Planimetri och likformighetslära ... 44

RAMSTEDT, E. Anm. av *Anna Beckman*, Strålar och strålning ... 234

RED. Med anledning av ANDERS WIMANS sextiofemårsdag ... 129

RUDBERG, E. Anm. av *Methuens Monographs on Physical Subjects*, Vol. I—IV ... 41

— — Soft X-Rays and Secondary Electrons (ref. av gradualavh.) ... 46

— — Nobelpristagarna i fysik, O. W. Richardson och L. V. de Broglie 69

SJÖSTEDT, C. E. (α, β)-Korrespondenzen, α, $\beta \leq 2$, auf elliptischen und hyperelliptischen Kurven (ref. av gradualavh.) ... 172

SJÖSTRAND, O. Sur le problème de M. Goursat pour les équations aux dérivées partielles du second ordre ou de l'ordre supérieur (ref. av gradualavh.) ... 241

STARCK, G. Den elektrolytiska polarisationen ... 17

— — Jacob Berzelius, 150-årsminnet av hans födelse ... 65

— — Anm. av *De tekniska vetenskaperna*, Kemisk teknologi ... 234

SÖRENSEN, A. †. Om fotpunktstrianglar ... 221

WAHLGREN, M. Anm. av Övningsexempel i räkning för inträdessökande till realskolan av *Inghe-Jonsson* och av *Wetterwik* ... 237

WETTERBLAD, T. Några skolförsök med elektronröret ... 83

— — Anm. av *A. Göransson*, Lärobok i elektroteknik ... 107

— — Anm. av *E. Nilsson*, Laborationsuppgifter i elektrostatik och magnetism ... 108

— — Barometrar och höjdmätare enl. system Paulin ... 156

— — Anm. av *S. Brun og O. Devik*, Lærebog i fysikk ... 235

Sid.
WITT, H. En metod att framställa termostaplar 225
ÅKESSON, N. Anm. av *E. Burns*, Radio, A study of first principles 37
— — Anm. av *A. Sigfrids*, Elementär elektroteknik..... 106
— — Anm. av *J. Körner*, Elektriska motorer och motoranläggningar 169
ÖLANDER, A. Studien über Brombernsteinssäure (ref. av gradualavh.) 170

Avhandlingar och uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1928—29 ... 54
Föreläsningar för lärarkandidaterna v d provårsläroverken 1928—29 ... 55
Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna h. t. 1929 123
— — v. t. 1930 251
Provräkning i realskolexamen h. t. 1929 128
— — v. t. 1930 255
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. BÅGMAN) 56, 118, 179, 245
— —: Fysikaliska uppgifter (förf. av R. Lundblad)..... 59, 184
Gradualavhandlingar (autoreferat): ERIK RUDBERG (46), AXEL LARSSON (48), ARNE ÖLANDER (170), C. E. SJÖSTEDT (172), OLOF SJÖSTRAND (241), FRITZ KIESSLING (242), BROR JONZON (242).
Översikt av innehållet i följande tidskrifter: Populär astronomisk tidskrift, Svensk kemisk tidskrift, Vetenskapen och livet, Era, Industritidningen Norden, Radioamatören, Radio och Grammofon, Matematisk Tidsskrift (København), Fysisk Tidsskrift (København), Norsk Matematisk Tidsskrift (Oslo), Den Høiere Skole (Oslo)..... 50, 115, 174, 243
Kataloger, referat av nyheter m. m.: Siemens Z-instrument och torrlikriktaren »Protos». Westons instrument, Smalfilm från Edv. Nerlien, Zeiss-Ikons apparater för smalfilm, Amatörsändarrör m. m. från Philips, Rationell belysning 52
Eldsläckningsapparater, Hydraulisk press, Skjutmotstånd, Termostapel, Glaserade motstånd, Skolfilmapparater 177
De moderna cellulosalackerna, Tillit, Kromnickeltråd 244
Bokanmälningar:
BURNS, Radio; HAGSTRÖM, Talens vetenskap; BJERKNES, Niels Henrik Abel; BRODETSKY, Isaac Newton; JOHNSON, Spectra; FLINT, Wave Mechanics; RATCLIFFE, The Physical Principles of Wireless; EMELÉUS, The Conduction of Electricity through Gases; JOSEPHSON, Planimetri och likformighetslära; POHL, Einführung in die Elektrizitätslehre; OLSON, Algebra för latingymnasiet; COLLIN-OHLON, Algebra..... 37
RYDBERG-WAHLSTRÖM, Matematiska uppgifter i studentexamen på latinlinjen; SIGFRIDS, Elementär elektroteknik;

Sid.

GÖRANSSON, Elektroteknik; NILSSON, Laborationsuppgifter i magnetism och elektrostatik; HELLSTEN, Fysik och astronomi; MALMBORG, Övnings- och lärobok i fysik; Meddelande om ny materiell från Norstedt & Söner; AMINOFF, Om meteoriter; BOLIN, Levande och död materia 106

KOSMOS, Fysiska uppsatser; HOLST-KRAMERS, Bohrs Atomteori; HEDSTRÖM-ÖIJE, Aritmetik och ekvationslära; RENDAHL-WAHLSTRÖM-FRANK, Räknebok för realskolan; COLLIN-OHLON, Lärobok i plan trigonometri; KÖRNER, Elektriska motorer; LANDAU, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie 162

BECKMAN, Strålar och strålning; De tekniska vetenskaperna, Kemisk teknologi; BRUN-DEVIK, Lærebog i fysikk; LEMOINE, Från mikrofonen till högtalaren; Övningsexempel i räkning för inträdessökande till realskolan av INGHE-JONSSON och av WETTERWIK; Meddelande om ny materiell; JARL, Repetitionskurs i algebra 234

Insänd litteratur från följande förläggare:

Almqvist & Wiksell; H. Aschehoug, København, Oslo; M. Bergvall; Albert Bonnier; A. V. Carlson; Franckhsche Verlagshandlung, Stuttgart; C. E. Fritze; Hugo Geber; C. W. K. Gleerup; N. J. Gumpert; Kooperativa förbundet; Felix Meiner, Leipzig; Nasjonalforlaget, Oslo; Olaf Norli, Oslo; P. A. Norstedt & Söner; J. Springer, Berlin; Th. Steinkopf, Dresden; J. H. Schultz, København; Svenska Bokförlaget; Tidens förlag; Åhlén & Holm; Åhlén & Åkerlund.

Annonsörer under året: ASEA, A.-B. Wilh. Becker, J. Beckmans Bokförlag, A. V. Carlsons Bokförlag, Ingenjör E. Flodman, C. E. Fritzes Bokförlag, Rudolph Grave, Industritidningen Norden, Nerliens A.-B., P. A. Norstedt & Söners skolmateriellavdelning, Optiska Instrument A.-B., Svenska Aktiebolaget Philips, Firma Georg Schönander (Zeiss, Jena), Svensk Filmindustri, Ingenjörsfirman Zander och Ingeström, Tidskriften Radio och Grammofon, Svenska Bokförlaget.

Tidskriften utkommer med fyra 64-sidiga nummer årligen (sept., dec., mars, juni). Pris för enkelt häfte kr. 2: 25, för årgång kr. 8: —. Subskription kan ske i varje bokhandel, direkt hos Albert Bonnier, Stockholm eller genom redaktionen. Sker subskription hos förläggaren eller redaktionen, sändes första häftet mot postförskott å 8 kr., övriga häften pr korsband portofritt. Dessa priser gälla även Danmark, Finland och Norge.

Redaktionens adress är: **Adjunkt C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16 IV, Stockholm Va.**

Några reflexioner beträffande latingymnasiets nya matematikkurser.

Av OLOF JOSEPHSON.

Den nya läroverksorganisationen har farit hårt fram över matematiken på latingymnasiet. Om också reduktionen i kursens omfattning för dem, som bland sina tillvalsämnen i de båda högsta ringarna ha matematik, ej ser så stor ut på papperet, måste den dock på grund av det låga timantalet i första och andra ringen av det fyraåriga gymnasiet och ämnets totala slopande i första ringen av det treåriga bli högst avsevärd i verkligheten. Det gäller då att så långt det är möjligt tillse, att kursens matematiska bildningsvärde ej blir alltför mycket lidande. Två omständigheter betyda härvidlag mest, den ena är studentexamensuppgifterna — varom vi ännu ingenting veta —, den andra är kursens närmare utformning i de särskilt för latingymnasiet avsedda läroböckerna. En dylik utformning föreligger nu i den av lektor HJALMAR OLSON utgivna Algebra med planimetri och stereometri för latingymnasiet, i huvudsak en förkortad upplaga av hans i många avseenden förträffliga Algebra och Planimetri[1]. Det är till stor del studiet av denna förkortade upplaga — i någon mån även av den nya upplagan av Collins algebra, omarbetad av lektor SVEN EM. OHLON — men också mångårig erfarenhet dels från ett latingymnasium, dels från Högre lärarinneseminariet med dess större frihet i fråga om kurserna, som föranlett efterföljande reflexioner.

Inträngandet i ett visst område av matematiken kräver *förstående* och *färdighet*. I många fall förutsätta dessa båda

[1] Se sid. 45.

moment varandra. Möjligen kan man vinna färdighet inom ett område, som man knappast förstår. Men en sådan färdighet är ur bildningssynpunkt föga värd. Å andra sidan förstår man ej fullt utan en viss färdighet. Därför får träningen i de grundläggande partierna ej åsidosättas. Man har också allt skäl att vara lektor Olson tacksam för att han i sin lärobok givit så stort utrymme åt ren algebra och ekvationslära. Verklig träning härvidlag kan ej undvaras av någon, som vill lära sig matematik. Mer tveksam ställer jag mig till formella övningar i större utsträckning inom ett par andra områden, nämligen dels räkning med kvadratrötter, dels rötter i allmänhet och potenser. Kvadratrötterna ha på skolstadiet sin huvudsakliga betydelse för planimetrin. Också har Wahlgren i sin Algebra och Funktionsteori ställt kvadratrotläran och planimetrin i intimaste samband och inskränkt de formella övningarna i räkning med kvadratrötter till ett minimum. Knappast torde detta avsteg från gammal tradition vara på något sätt ödesdigert för de matematiska studierna.

Vad rötter och potenser beträffar, ger den nya undervisningsplanen en bestämd ledtråd för begränsning på latingymnasiet. Där förekommer ej längre, och detta helt visst fullt avsiktligt, den gamla sammanställningen »rötter, potenser och logaritmer», utan endast »logaritmer med huvudvikten lagd på deras användning för numerisk räkning; såsom inledning härtill kortfattad genomgång av potensbegreppet». Meningen är väl alltså, att man hädanefter ej skall använda någon tid för särskilt innötande av ett flertal »räknelagar för rötter» utan låta dessa framgå som specialfall av potenslagarna. En på detta sätt koncentrerad framställning kanske skulle kunna skisseras på följande sätt:

Om a och b äro positiva tal, är likheten $a = \sqrt[n]{b}$ blott ett annat uttryck för att $a^n = b$. Ett studium av kurvorna $y = x^n$ för jämna och udda heltalsvärden på n klarlägger frågan om de reella n:te rötternas existens. (I samband

härmed kan man naturligtvis gärna beröra den allmänna lösningen av ekvationerna $x^3 = 1$, $x^3 = -1$, $x^4 = 1$ och därmed analoga.) Härefter övergår man direkt till potensbegreppet genom att erinra om de tre dignitetlagarna

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c},$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}, \text{ om } b > c,$$

$$(a^b)^c = a^{bc},$$

gällande för positiva heltalsvärden på b och c. Dessa lagar visa, hur vissa räkningar med digniteter motsvaras av enklare räkningar med exponenterna. Kunde därför symbolen a^b generaliseras så, att alla tal kunde skrivas såsom dylika »potenser» av en och samma »bas», och *om denna generalisering kunde göras så, att de tre föregående lagarna fortfarande ägde bestånd,* så kunde detta bli till väsentlig hjälp vid sifferräkning. Med ledning av denna princip om »räknelagarnas permanens» erhållas definitionerna

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \text{ allmännare } a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p},$$

(ty $\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^n$ måste, om 3:e »potenslagen» skall gälla, vara $= a^p$)

$$a^0 = 1,$$

(ty endast under denna förutsättning blir 2:a potenslagen giltig även för $b = c$),

$$a^{-c} = \frac{1}{a^c},$$

(ty endast så kan sistnämnda lag bli giltig även för $b = 0$).

Dessa tre definitioner äro således *nödvändiga* villkor för de tre dignitetlagarnas giltighet även såsom allmänna potenslagar. Äro de också *tillräckliga* villkor?

Före besvarandet av denna fråga måste undersökas, om definitionen på $a^{\frac{p}{n}}$ medger förlängning (och förkortning) av bråkexponenten, ty i motsatt fall skulle man frestas till ständiga misstag. Det gäller alltså att bevisa, att

$$a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{pq}{nq}},$$

d. v. s. att $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{pq}}$, och detta följer av likheterna

$$\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^{nq} = \left[\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^n\right]^q = \left[a^p\right]^q = a^{pq}.$$

Första potenslagen för positiva bråkexponenter innebär, att

$$a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{pn+qm}{mn}},$$

d. v. s. att $$\left(a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}}\right)^{mn} = a^{pn+qm},$$

och detta erhålles på analogt sätt som ovan med hjälp av dignitetlagarna. Enligt samma metod bevisas den tredje potenslagen för positiva bråkexponenter, och den andra lagen är, så länge som $b > c$, endast en omskrivning av den första $(a^c \cdot a^{b-c} = a^b)$.

Har man på detta sätt utsträckt de tre dignitetlagarna till positiva bråkexponenter, kan man taga fortsättningen mer summariskt. Man kan verifiera lagarnas giltighet för de fall, då endera eller båda exponenterna äro negativa, genom att räkna en del exempel på två sätt, t. ex.

$$a^{-3} \cdot a^{-4} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^7} = a^{-7},$$

vilket är samma resultat, som den direkta användningen av första lagen ger. Att bevisa alla lagarna för alla upptänkliga fall är långrandigt och föga instruktivt. Det viktiga är att för vissa fundamentala fall ha visat, hur härledningen kan göras.

Nu följa sådana satser som t. ex. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ direkt ur potenslagarna, till vilka man vid behov ständigt refererar. Så blir potensbegreppet det centrala och potenslagarna det allmängiltiga uttrycket för ett flertal hithörande satser.

Såsom övergång till logaritmläran studeras nu kurvor sådana som $y = 2^x$, $y = 3^x$ och framför allt $y = 10^x$ och dess omvändning $x = 10^y$, åt vilken likhet man omedelbart ger omskrivningen $y = \log x$.

Vad nämligen logaritmerna beträffar, bör det med den avfattning, som kursmomentet i fråga erhållit i kursplanen, på latinlinjen vara tillräckligt att endast i förbigående nämna om andra logaritmer än ^{10}logaritmerna (en sak, som redan för snart 30 år sedan vid en studentexamen framhölls för mig av censorn, professor Hildebrandsson, till vilken jag även i andra avseenden står i tacksamhetsskuld för praktiska vinkar). Att t. ex. härledningen av logaritmlagarna för nybörjaren ställer sig lättare och klarare med beteckningen log b än med ^{a}log b, är otvivelaktigt, och alla de i fråga om formuleringen ofta krångliga uppgifterna om logaritmer i olika system (förr så vanliga både i exempelsamlingar och bland studentuppgifter) äro föga givande. Vidare vore det en välgärning, om det gamla, mycket omhuldade kapitlet exponentialekvationer finge sin plats i museet för matematiska antikviteter, frånsett naturligtvis typen $a^x = b$.

För att nu beröra ett helt annat område av kursen har ju fjärde ringens kurs i rymdgeometri strukits och ersatts med stereometriska räkneuppgifter på ett tidigare stadium. Förlusten är ej så väsentlig, om momentet i fråga behandlas på ett så förträffligt sätt som i Hj. Olsons lärobok. Han har i den ingalunda vidlyftiga samlingen av räkneexempel på detta område fått in mycket av det värdefullaste, som hittills förekommit i latingymnasiets rymdgeometriska kurs, och detta avsnitt av boken hör enligt min uppfattning till dess allra starkaste partier. Man kunde möjligen gå ett steg längre och även på detta tidiga stadium ge en antydan om hur uttrycket för en sfärisk zons yta kan erhållas (med hjälp av uttrycket $2\pi ph$ för en stympad kons mantelyta). Författaren har ju ändå ej helt undvikit »infinitesimala metoder» (klotets volym). En större fyllighet på detta område synes mig på latinlinjen mer värd än att alltför mycket gå in på t. ex. frågan om räkning med närmevärden. Det beror ju på vilken synpunkt man här bör anlägga, och en del röster ha höjts för att göra latingymnasiets matematikundervisning övervägande *praktisk*.

Det må vara sant, att den *obligatoriska* matematikkursen på latingymnasiet ej bör ha alltför teoretisk syftning. Kapitlet om räkning med närmevärden är också hos Hj. Olson inrymt i de båda lägsta gymnasieringarnas kurs. S. E. Ohlon placerar det däremot — liksom Collin — i lärobokens för överstadiet avsedda del (detsamma gäller för övrigt exemplen på räkning med kvadratrötter); denna del av Collin-Ohlons algebra svarar dock mera mot realgymnasiets behov, och om den kommer att i oförändrad form användas på latingymnasiet, får man där göra högst avsevärda uteslutningar, under det att den första delen bör kunna medhinnas i latingymnasiets första och andra ringar, åtminstone om man går förbi en del av de relativt talrika ekvationsproblemen.

För latingymnasiets överstadium är undertecknad mest böjd för att anlägga mer teoretiska, varför icke också *estetiska* synpunkter. Den praktiska färdigheten är av långt större vikt på reallinjen, för blivande ingenjörer m. fl. De latinare, som i framtiden komma att syssla med praktiskt matematiska frågor, torde väl mest få röra sig inom starkt begränsade områden, där de få tillämpa vissa bestämda förfaringssätt, som ändå ej ha sin plats i gymnasieundervisningen. För övrigt ha latinarna, minst lika väl som realisterna, gott av en mer formell matematisk bildning, som vidgar deras blick för det logiska sammanhanget, för härledningarnas enkelhet och överskådlighet, för formlernas symmetri. Detta kan också i långt högre grad än en hel del problem av mer praktisk art väcka deras intresse för matematiken.

Ovan har (i fråga om potenslagarna) antytts, att man naturligtvis ej behöver ge fullständiga härledningar överallt. Men där de förekomma, böra de kunna tjäna som mönster för andra liknande och således uppfylla de krav på stringens, som hör till en god gymnasieundervisning. Det vore väl egentligen onödigt att framhålla detta, men från Collins algebra har i Ohlons edition fått kvarstå en del föga tillfredsställande resonemang, vilka dock av Collin själv

angivits såsom lämpade efter lärjungarnas ståndpunkt i den hittillsvarande realskolans fjärde klass. Sålunda finner man i början av första delen följande passus: »Genom uträkning finner man, att $12 - (8 - 3 + 4)$ *icke* är lika mycket som $12 - 8 - 3 + 4$ men däremot lika mycket som $12 - 8 + 3 - 4$ och i allmänhet att *en parentes, som i egenskap av term står efter ett* — *tecken, får borttagas, om man ändrar tecknen för termerna inom densamma.*» Detta »genom uträkning» är ju just vad som *icke* kan ske, då det gäller att övertyga sig om allmängiltigheten av sådana satser som att

$$a - (b + c) = a - b - c,$$
$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Men även på det tidiga stadium, som Collin avsett, och ännu mer på gymnasialstadiet, kan ju saken ytterst lätt klargöras, t. ex. så: Om man från 12 skall subtrahera 8—3 och börjar med att från 12 subtrahera 8, så har man tagit bort 3 för mycket och skall därför, för att få rätt resultat, sedan öka med 3, o. s. v. Uträkningsmetoden rekommenderas vid det citerade stället i Collin-Ohlons lärobok konsekvent, och jag har därför ansett ett påpekande härav ej vara alldeles obehövligt. — Hos Hj. Olson har jag fäst mig vid ett par enstaka fall av bristande stringens. Det ena är följande resonemang: emedan såväl ekvationen $x^2 - 5x + 6 = 0$ som ekvationen $(x - 2)(x - 3) = 0$ till rötter ha $x = 2$ och $x = 3$, måste $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Denna bevismetod har påtagligen sina risker, om också icke precis i det sammanhang, i vilket det här förekommer. — Det andra fallet gäller proportionalitet: författaren börjar med att funktionen $y = \frac{3}{2}x$ grafiskt betyder en rät linje genom origo (något som aldrig *bevisats*) och får av likformiga trianglar fram den proportionalitet mellan x- och y-värden, som ju utan diagrammet exakt framgår ur ekvationen. I det hela är författaren emellertid mycket noga med slutsatserna och säger helt enkelt, då ett bevis

ej utförts: man kan visa, att det förhåller sig så och så. Detta är naturligtvis den korrekta metoden, då man anser att en fullständig bevisföring skulle bli för omständlig eller ligga utanför lärjungarnas horisont.

I de hittills gällande kursplanerna förekom såsom särskilt moment en sammanfattande genomgång av planimetrin. Detta kvarstår ej i den nya planen, utan satser och räkneexempel rörande planimetrin tänkas fördelade på olika områden, dit de höra, geometri, kvadratrötter och andragradsekvationer, trigonometri. Så har naturligtvis faktiskt skett också hittills, och flertalet nyare läroböcker i algebra, Wahlgrens, Mattsons, Olsons och Collin-Ohlons, upptaga såväl de vanliga planimetriska formlerna med härledning som talrika övningsexempel. De s. k. skolsakkunnigas förslag upptog för matematikkursen på latingymnasiets nederstadium även trigonometriska beräkningar rörande rätvinkliga trianglar. Det är stor skada, att detta moment strukits i och med den kraftiga reduktionen av timantalet, ty därmed har sammanslagningen av planimetri och trigonometri till ett helt försvårats. Den är dock ej omöjliggjord, ty om också trigonometrin i den nya planen ej upptages förrän i fjärde ringens — väl omåttligt stora — kurs, kan den ju, då kursplanen uttryckligen tjänar »till huvudsaklig ledning», påbörjas redan i tredje ringen och därmed ställas i närmare samband dels med likformighetsläran och planimetrin, dels med övningarna i logaritmräkning. Detta är avgjort tidsekonomiskt och kommer nog att visa sig nödvändigt, om man skall medhinna den stora kursen.

Till denna stora kurs har ju fogats ett tillägg av väl tämligen omtvistligt värde — exempel på sannolikhetsberäkning. Vilka motiv som föranlett detta, är svårt att förstå. Ty ingen tror väl på allvar, att man på den korta tid, som står till förfogande, skall kunna införa lärjungarna i detta svåra område så, att de förstå sannolikhetskalkylens praktiska användningar — och vad har man annars egentligen vunnit? Hj. Olsons korta lärobok, Sannolikhetskalkylens första grunder, av vilken ungefär hälften inrymts

i läroboken för latingymnasiet, upptager ytterst litet av praktiska frågor. Det blir till största delen uppgifter rörande kulor i en urna, tärningar och kortlekar. Med riktig blick för områdets svårighet har författaren känt sig nödsakad att huvudsakligen stanna vid dessa rätt så banala frågor. Mer sangvinisk är S. E. Ohlon, som i algebrans senare del infört ett kapitel om kombinatorik och sannolikhetskalkyl, även utgivet separat. Det innehåller, icke minst med avseende på kombinatoriken, en hel del roande exempel, och jag tvivlar ej på att det kommer att intressera många lärjungar. Men som redan förut antytts, denna senare del går åtskilligt utöver vad man kan tänka sig medhinna på latingymnasiet.

Hade det icke varit lyckligare, om införandet av sannolikhetskalkylen — för så vitt detta nu var av så stor vikt — gjorts valfritt för de läroverk, där ämneskonferensen trodde på nyttan av det nya kursmomentet och på möjligheten att där komma till något resultat av värde? Måhända är det icke för djärvt att tänka sig utvecklingen kunna gå i riktningen mot en fast minimikurs, vartill vid olika läroverk kunde komma olika tilläggskurser (oavsett sådana tilläggskurser, som vissa lärjungar välja som specialarbete). Såsom exempel på en dylik för latingymnasiet lämplig tilläggskurs kan, förutom möjligen sannolikhetskalkylen, nämnas hela rationella funktioners derivator och integraler med tillämpning på kurvritning och på enkla yt- och volymberäkningar (de stereometriska formlerna behövde då ej bli endast dogmatiskt inpräglade). En sådan orientering på infinitesimalkalkylens område skulle säkert i fråga om matematiskt bildningsvärde ej stå sannolikhetskalkylen efter. — Dessa för olika läroverk olika tilläggskurser borde emellertid ej få bli föremål för uppgifter i studentskrivningarna, men så mycket mer kunde det för censorerna vara intressant att i den muntliga studentexamen taga del av olika lärares och läroverks intentioner.

En lek med siffror.

Av HENRIK PETRINI.

1. Dubbelt irrationella uttryck.

Reduktion av dubbelt irrationella uttryck av formen $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, där a och b äro rationella tal, torde ej lämpligen böra upptaga någon nämnvärd plats vid undervisningen, men kan ej heller helt förbigås. Vid min undervisning har följande framställning fått vara nog. Sätt

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}},$$

(1) . . $\because \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Man skriver nu

(2) . . . . $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{a+2\sqrt{\frac{b}{4}}}$

och söker två tal x och y sådana, att

(3) . . . . . $\begin{cases} x+y=a \\ xy=\frac{b}{4}, \end{cases}$

(4) . . . . $\because \sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Det är fullt tillräckligt att vid undervisningen endast använda sådana exempel, där x och y kunna erhållas genom gissning.

Anm. På samma sätt reduceras uttrycket $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ till formen $\sqrt{x}-\sqrt{y}$, där $a > \sqrt{b}$.

Ex. $\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{\frac{3}{16}}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$,

$\because x+y=1,\ xy=\frac{3}{16},\ \because x=\frac{1}{4},\ y=\frac{3}{4}$,

$\because \sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

2. Identiteter.

Vid räkning med rötter av högre grad kan man lämpligen ge ett och annat exempel på att bevisa en identitet av ej alltför komplicerat utseende, t. ex. några av följande typ:

$$(5)\quad \begin{cases} \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} \\ \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1 \\ \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2 \\ \sqrt[3]{2\sqrt{13}+5} - \sqrt[3]{2\sqrt{13}-5} = 1 \\ \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 3 \\ \sqrt[3]{1+\tfrac{2}{9}\sqrt{21}} + \sqrt[3]{1-\tfrac{2}{9}\sqrt{21}} = 1 \\ \sqrt[3]{9\sqrt{21}+10\sqrt{17}} + \sqrt[3]{9\sqrt{21}-10\sqrt{17}} = \sqrt{21} \text{ m. fl.} \end{cases}$$

Man har även identiteter av annan form, såsom

$$(6)\quad \ldots \quad \begin{cases} \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2} \\ \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3} \\ \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5} \\ \sqrt[3]{19+9\sqrt{6}} = 1+\sqrt{6} \\ \sqrt[3]{22+10\sqrt{7}} = 1+\sqrt{7} \\ \sqrt[3]{31+13\sqrt{10}} = 1+\sqrt{10} \text{ etc.,} \end{cases}$$

där $+\sqrt{\ }$ kan utbytas mot $-\sqrt{\ }$. Vidare är

$$(7)\quad \ldots \quad \begin{cases} \sqrt[3]{9\sqrt{3}\pm 11\sqrt{2}} = \sqrt{3}\pm\sqrt{2} \\ \sqrt[3]{26\pm 15\sqrt{3}} = 2\pm\sqrt{3} \\ \sqrt[3]{11\sqrt{5}\pm 17\sqrt{2}} = \sqrt{5}\pm\sqrt{2} \\ \sqrt[3]{14\sqrt{5}\pm 18\sqrt{3}} = \sqrt{5}\pm\sqrt{3} \\ \sqrt[3]{17\sqrt{5}\pm 38} = \sqrt{5}\pm 2 \\ \sqrt[3]{2\sqrt{7}\pm 3\sqrt{3}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{7}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\ \sqrt[3]{9\pm 4\sqrt{5}} = \tfrac{3}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{5} \text{ etc.} \end{cases}$$

Genom sammanställning parvis av dessa formler fås identiteter av formen (5), såsom

$$(8)\ \ \begin{cases} \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2\sqrt{2} \\ \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} - \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5} \\ \sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}} = \sqrt{7} \\ \sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{cases}$$ etc. eller såsom

$$(9)\ \ \sqrt[3]{26 \pm 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{10 \pm 6\sqrt{3}} = 1.$$

Liknande formler gälla även för högre rötter, t. ex.

$$(10)\ \ \sqrt[5]{41+29\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

Av en annan form äro identiteterna

$$(11)\ \ \sqrt[3]{19+15\sqrt[3]{2}+12\sqrt[3]{4}} = 1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$$ och

$$(12)\ \ \sqrt[3]{39\sqrt[3]{6}-19} = \sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}.$$

3. Allmänna formler.

Den allmänna metoden att framställa dylika identitetsformler är densamma som använts i § 1 för dubbelt irrationella kvadratrötter. Man sätter

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt[3]{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3} = \sqrt[3]{x\sqrt{x}+3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}+y\sqrt{y}},$$

$$(13\,a)\ \ \because\ \sqrt[3]{(x+3y)\sqrt{x}+(3x+y)\sqrt{y}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

På samma sätt fås

$$(13\,b).\ \ \sqrt[3]{(x+3y)\sqrt{x}-(3x+y)\sqrt{y}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

Sätter man

$$(14)\ \ \ldots\ \ y = xz$$

och dividerar med $\sqrt{x}$, fås identiteterna

$$(15)\ \ \begin{cases} \sqrt[3]{(1+3z)+(3+z)\sqrt{z}} = 1+\sqrt{z} \\ \sqrt[3]{(1+3z)-(3+z)\sqrt{z}} = 1-\sqrt{z}. \end{cases}$$

Genom att ge åt z olika rationella värden erhållas identiteterna (5), (6) och (7). För $z=5$ erhålles sålunda

$$(16)\ \ \ldots\ \ \begin{cases} 2\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}+1 \\ 2\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}-1, \end{cases}$$

varur de två första identiteterna i (5) erhållas omedelbart. Generellt fås av (15)

$$(17)\quad \begin{cases} \sqrt[3]{(1+3z)+(3+z)\sqrt{z}}+\sqrt[3]{(1+3z)-(3+z)\sqrt{z}}=2 \\ \sqrt[3]{(1+3z)+(3+z)\sqrt{z}}-\sqrt[3]{(1+3z)-(3+z)\sqrt{z}}=2\sqrt{z}. \end{cases}$$

På liknande sätt finner man

$$(18)\quad \sqrt[5]{(1+10z+5z^2)\pm(5+10z+z^2)\sqrt{z}}=1\pm\sqrt{z},$$

varur (10) erhålles för $z=2$. Likaså

$$(19)\quad \sqrt[3]{(z^2+\alpha^3z+6\alpha z+1)+3(\alpha^2z+z+\alpha)\sqrt[3]{z}+3(\alpha z+\alpha^2+1)\sqrt[3]{z^2}}= \\ =1+\alpha\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{z^2} \quad \text{och}$$

$$(20)\quad \sqrt[3]{(z^2+\alpha^3z-6\alpha z-1)+3(\alpha^2z-z+\alpha)\sqrt[3]{z}+3(\alpha z-\alpha^2+1)\sqrt[3]{z^2}}= \\ =-1+\alpha\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{z^2}.$$

Sättes i (19) $\alpha z+\alpha^2+1=0$, så fås

$$(21)\quad \sqrt[3]{3\left(\alpha^3+\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\sqrt[3]{\alpha+\frac{1}{\alpha}}-\left(\alpha^4+6\alpha^2+3-\frac{1}{\alpha^2}\right)}= \\ =1-\alpha\sqrt[3]{\alpha+\frac{1}{\alpha}}+\sqrt[3]{\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2}.$$

Likaså erhålles ur (20):

$$(22)\quad \sqrt[3]{3\left(\alpha^3-\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\sqrt[3]{\alpha-\frac{1}{\alpha}}+\left(\alpha^4-6\alpha^2+3+\frac{1}{\alpha^2}\right)}= \\ =-1+\alpha\sqrt[3]{\alpha-\frac{1}{\alpha}}+\sqrt[3]{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2}.$$

Ur (19) erhålles (11) för $z=2$ och $\alpha=1$. Likaså erhålles (12) ur (22) för $\alpha=2$.

4. Diskussion.

Om man i identiteterna (17) ger åt z rationella värden, så får man formler, där dubbelt irrationella uttryck reduceras till rationella eller enkelt irrationella. Nu ligger det nära till hands att fråga sig, om det finns några fall, då en formel av formen

$$(23)\quad \sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{c},\ a,\ b \text{ och } c \text{ rationella},$$

gäller, utan att den kan återföras på identiteten (17). Divideras (23) med $\frac{\sqrt{c}}{2}$, så övergår (23) till formen

(24) . . $\sqrt[3]{\sqrt{a_1}+\sqrt{b_1}}+\sqrt[3]{\sqrt{a_1}-\sqrt{b_1}}=2,$

där a_1 och b_1 äro rationella tal. Införes en obekant z enligt ekvationen

(25) . . . $\begin{cases}\sqrt[3]{\sqrt{a_1}+\sqrt{b_1}}=1+\sqrt{z}, \text{ så fås}\\ \sqrt[3]{\sqrt{a_1}-\sqrt{b_1}}=1-\sqrt{z}.\end{cases}$

Enligt (15) och (25) fås

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{b_1}=(1+3z)+(3+z)\sqrt{z}$$
$$\sqrt{a_1}-\sqrt{b_1}=1+3z-(3+z)\sqrt{z},$$

(26) . . . . $\because \begin{cases}1+3z=\sqrt{a_1}\\ (3+z)\sqrt{z}=\sqrt{b_1},\end{cases}$

(27) . . . . $\because z=\frac{1}{3}(\sqrt{a_1}-1)$ och

(28) . . . $\left(2\tfrac{2}{3}+\frac{\sqrt{a_1}}{3}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{a_1}-1}{3}}=\sqrt{b_1}.$

Kvadreras (28), fås efter någon reduktion

(29) . . $\sqrt{a_1}(a_1+48)=27b_1-15a_1+64.$

Då nu a_1 antages vara >0, ty eljest bleve $\sqrt{a_1}$ imaginär eller $=0$, så följer av (29), att $\sqrt{a_1}$ är ett rationellt tal, $\because$ är z rationellt enligt (27). Ekvationen (24) har sålunda återförts på den första av ekvationerna (17) för det fall, att z är ett rationellt tal, och formeln (23) innehåller således inga nya fall.

Man kunde vara frestad att undersöka, om det finns några rationella värden på a, b och c, vilka satisfiera ekvationen

(30) . . . . . $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c},$

där minst två termer äro irrationella och den tredje $\neq 0$. Om något av talen är ett bråk, så kan nämnaren multipliceras upp, och man får då en ekvation av samma form. Vi kunna därför antaga, att a, b och c äro hela tal. Om

dessa ha en gemensam faktor α, så kan $\sqrt[3]{\alpha}$ divideras bort. Vi kunna därför även antaga, att i ekvation (30) a, b och c ej ha någon gemensam faktor. Kuberas ekvation (30) fås

$$a + 3\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) + b = c,$$

(31) . . . $\because\ 3\sqrt[3]{abc} = c - a - b$.

Av (31) följer, att $\sqrt[3]{abc}$ måste vara ett helt tal. Då man kan antaga, att $\sqrt[3]{a}$ är irrationell, så måste a ha någon faktor gemensam med b eller c, posito b, så att produkten innehåller en kubisk faktor α^3, där α är ett helt tal. Då nu tre av termerna i (31) innehålla α som faktor, så måste även den fjärde termen (c) innehålla faktorn α, vilket strider mot antagandet. Ekvation (30) är alltså orimlig under de givna antagandena.

Man kan bevisa samma sak om ekvationen

(32) . . . . . $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt{c}$,

där a, b och c antagas vara rationella. Efter kubering fås

(33) . . . . $3\sqrt[3]{ab} = c - \dfrac{a+b}{\sqrt{c}}$.

Om $\sqrt[3]{ab}$ är rationell, så blir $\sqrt{c}$ rationell, och ekvation (32) blir då av formen (30) och alltså orimlig. Om åter $\sqrt[3]{ab}$ är irrationell, så är $\sqrt{c}$ också irrationell. Kuberas (33), fås

(34) $$27ab = c^3 - \frac{(a+b)\,[3c^3 + (a+b)^2]}{c\sqrt{c}} + 3\,(a+b)^2,$$

(35) $\because\ 3c^3 + (a+b)^2 = 0$, $\because\ \sqrt{c}$ imaginär,

vilket är orimligt enligt (32). Ekvation (32) är alltså orimlig.

5. Casus irreductibilis.

Om man i identiteterna (13 a) och (15) utbyter y mot $-y$ och z mot $-z$, fås

(36) $$\begin{cases} \sqrt[3]{(x - 3y)\sqrt{x} + (3x - y)\,i\sqrt{y}} = \sqrt{x} + i\sqrt{y} \\ \sqrt[3]{(1 - 3z) + (3 - z)\,i\sqrt{z}} \quad\ = 1 + i\sqrt{z}, \end{cases}$$

där i kan bytas ut mot $-i$. Om x, y och z äro reella och > 0, så äro de högra leden entydigt bestämda, och man måste därför avgöra, vilken av de tre tredje-rötterna i vänstra ledet man måste taga. Detta kan ske med tillhjälp av Moivres teorem sålunda: Man skriver om uttrycket $\sqrt[3]{a+bi}$ genom att sätta

(37) . . $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\frac{a}{r} = \cos u$, $\frac{b}{r} = \sin u$,

där man väljer u så, att

(38) . . . . . $0 \leqq u < 360°$.

Enligt Moivres teorem blir då

$$(39)\quad \sqrt[3]{a+bi} = \sqrt[6]{a^2+b^2}\left[\cos\left(\frac{u}{3}+k\cdot 120°\right) + i\sin\left(\frac{u}{3}+k\cdot 120°\right)\right],\quad k=0,\ 1,\ 2.$$

Tillämpas denna formel på den andra av formlerna (36), finner man

$$(40)\quad r=(1+z)^{3/2},\ \frac{1-3z}{r}=\cos u,\ \frac{3-z}{r}\sqrt{z}=\sin u,$$
$$0 \leqq u < 360°,\ z>0,$$

$$(41)\quad \because\ \cos\left(\frac{u}{3}+k\cdot 120°\right)+i\sin\left(\frac{u}{3}+k\cdot 120°\right) = \frac{1}{\sqrt{1+z}}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1+z}}\,i,\quad k=0,\ 1,\ 2.$$

Enligt (40) kan u ej ligga i fjärde kvadranten, $\because \frac{u}{3} \leqq 90°$.

Då nu $\cos\left(\frac{u}{3}+k\cdot 120°\right)$ är $= \frac{1}{\sqrt{1+z}} > 0$, och

$\sin\left(\frac{u}{3}+k\cdot 120°\right) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1+z}} > 0$, så ligger $\left(\frac{u}{3}+k\cdot 120°\right)$ i första kvadranten,

(42) . . . . . $\because\ k=0$,

och härigenom blir vänstra ledet i den andra av ekvationerna (36) entydigt bestämt. Då den första av ekvatio-

nerna (36) kan erhållas genom att sätta $z = \frac{y}{x}$, där x, y och z äro positiva, blir vänstra ledet även i denna ekvation bestämt genom ekvation (42).

Ex. Sättes $z = 1, 2, 3, 4$ i (36) fås resp.

$$(43) \quad \ldots \quad \begin{cases} \sqrt[3]{-1+i} & = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}} \\ \sqrt[3]{-5+i\sqrt{2}} & = 1+i\sqrt{2} \\ \sqrt[3]{-1} & = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt[3]{-11-2i} & = 1+2i. \end{cases}$$

Sättes $x = 2, 3, 4$ och $y = 1$, fås

$$(44) \quad \ldots \quad \begin{cases} \sqrt[3]{-\sqrt{2}+5i} & = \sqrt{2}+i \\ \sqrt[3]{i} & = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \\ \sqrt[3]{2+11i} & = 2+i. \end{cases}$$

Den elektrolytiska polarisationen.

Av G. STARCK.

Efterföljande notis är föranledd av en uppsats om samma ämne av A. Ahlström i första (sept.) häftet av årgång 12. Den elektrolytiska polarisationen torde enklast och tydligast påvisas, om man inriktar sig på att visa icke »polarisationsströmmen», utan polarisationsspänningen. Man behöver då inga instrument för utslag i två riktningar eller, då sådana saknas, särskilt konstruerade strömbrytare. Vidare är spänningen hög, på långt håll avläsbar, och försöket blir mera övertygande än vid iakttagande av den i allmänhet mycket svaga strömstyrkan. Den allra enklaste anordningen blir följande (fig. 1).

E är strömkällan, som måste lämna en spänning, större än polarisationsspänningen (1,3 volt), B det elektrolytiska badet, två platinerade platinableck eller två kolstavar i ut-

spädd svavelsyra, V en voltmeter. Sedan elektrolysen pågått någon minut, urkopplas E, varvid voltmeterns utslag sjunker till 1,3 volt med bibehållen riktning, vilket visar, att polarisationsspänningen har en riktning, motsatt den badet pålagda spänningen. Detta utslag håller sig länge konstant; vill man visa dess minskning, är det lämpligt att en stund kortsluta B genom en extra ledningstråd.

Önskar man studera fenomenet närmare, kan man använda följande koppling (fig. 2).

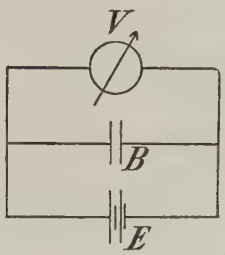


Fig. 1.

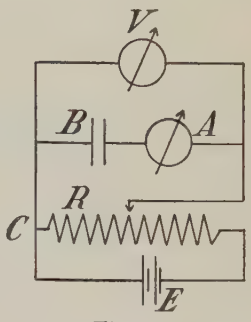


Fig. 2.

Medelst skjutmotståndet R uttages en variabel spänning, som lägges på B, kopplad i serie med en ampèremeter A. Ingen ström går genom B, förrän spänningen stigit till 1,3 volt. De strömstyrkor, som sedan erhållas vid växande spänning, äro proportionella mot $(V-1{,}3)$. För övrigt är upptagandet av en ström-spänningskurva vid denna anordning ett välbekant försök till sönderdelningsspänningen och en vacker illustration till ekvationen $V_1 - V_2 = ri - E$ (Molls fysik III, § 80), samtidigt ett mycket lämpligt laborationsförsök. — Bryter man B:s förbindelse med reostaten t. ex. i punkten C, går som förut voltmetern tillbaka till 1,3 volt, ampèremetern gör ett obetydligt utslag åt motsatt håll mot förut.

På grund av utpräglad adsorptionsförmåga för gaser äro kolstavar en lika effektiv som billig ersättning för platina vid dessa försök.

Små gasblåsors stighastighet i vatten.

Av TORGNY EDQVIST.

En diskussion vid ett restaurangbord, vilken rörde sig om kolsyrebubblornas lek i glaset, föranledde mig att söka efter formler för sambandet mellan en sfärisk gasblåsas radie och dess stighastighet i en vätska. Dylika formler ha föreslagits av H. S. Allen[1], O. Miyagi[2] och Felix M. Exner[3].

Enligt Allen råder ett lineärt samband mellan stighastigheten (v) och gasblåsans radie (r); $v = ar - b$, där a och b äro funktioner av tyngdaccelerationen och vätskans inre friktion. Exner fann på teoretisk väg, att hastigheten bör vara proportionell mot kvadratroten ur radien. Miyagis undersökningar ledde till en rätt komplicerad formel; han fann, att hastigheten antog ett maximalt värde för viss radiestorlek.

Fig. 1 visar kurvor över stighastigheten hos luftblåsor i vatten av 18°, beräknade enligt de olika teorierna. De stora diskrepanser mellan dessa, som tydligen föreligga, gav mig anledning att anställa några försök. Härvid ha gjorts ett stort antal mätningar av radier och stighastigheter i vatten hos dels gasblåsor, som spontant avsätta sig ur vatten — i det följande kallade luftblåsor — och dels koldioxidblåsor, erhållna genom att blanda vanligt vatten med vichyvatten. Mätningarna ha företagits med stighöjder mellan 26 cm och 93 cm samt vid temperaturer mellan 16° C och 20° C och hänföra sig i de flesta fall till 18° C. En godtyckligt vald försöksserie vid denna temperatur har inprickats i fig. 1.

[1] Phil. Magazine **50**, sid. 323, 1900.
[2] Phil. Magazine **50**, sid. 112, 1925.
[3] Phys. Zeitschr. **28**, sid. 825, 1927.

Mätningarna utfördes så, att ett upptill slutet och till större delen vattenfyllt glasrör av 3,1 cm inre diameter och 120 cm längd fästes vertikalt i ett stativ, så att rörets mynning befann sig strax över bottnen av en tämligen stor bägare innehållande vatten. Sedan konstant temperatur

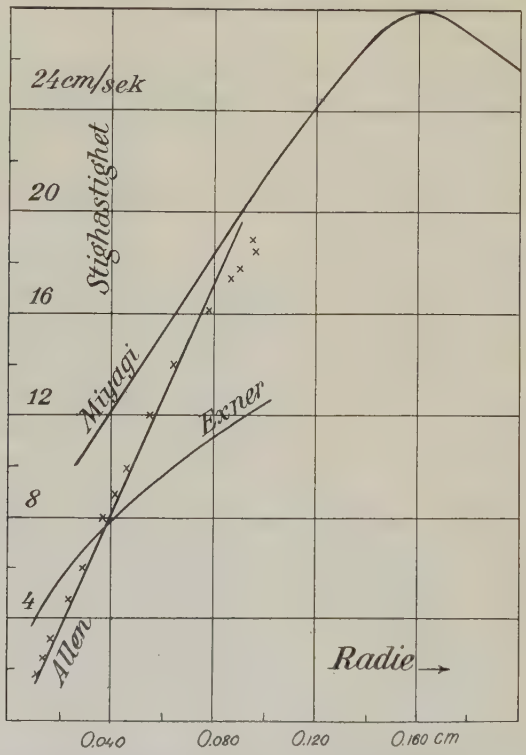


Fig. 1. Stighastighet för luftblåsor i vatten vid 18° C. Korsen ange observerade värden vid en av förf:s försöksserier.

inträtt, observerades gasblåsorna på bägarens innervägg genom ett enkelt avläsningsmikroskop.

Sedan en gasblåsas vertikala diameter blivit uppmätt, fattade jag blåsan med en metalltråd och förde den under det vertikala rörets mynning, varefter blåsan bragtes att lossna, därigenom att metalltråden lätt stöttes mot bägarens

botten. Dessa manipulationer tycktes ej märkbart ändra blåsans form eller storlek, enligt vad som framgick av några kontrollförsök, då på detta sätt frigjorda luftblåsor infångades medelst ett särskilt konstruerat kärl och ånyo placerades under mikroskopet.

Sedan blåsan stigit cirka 20 cm, passerade den ett märke på röret, varvid en sekundometer sattes i gång och tiden för passagen mellan märket och vattenytan i röret uppmättes. En oundviklig felkälla är den av tryckminskningen under stigningen förorsakade volymändringen. Emellertid är radiens ändring rätt obetydlig vid måttliga stighöjder (vid mina försök högst 3 %). Stighastigheten är ej oberoende av mängden av lösta gaser i vattnet. Finns t. ex. luft närvarande i överskott, så att vattenpelaren vid stark belysning synes vara fylld med ytterst små luftblåsor, blir stighastigheten onormalt stor. Några försök, som gjordes med nästan luftfritt vatten i stigröret, visade nedsatt hastighet för de allra minsta av de undersökta blåsorna, och ibland hände det, att en sådan blåsa helt försvann under sin väg genom röret. Däremot var minskningen i de större blåsornas hastighet obetydlig. Kvalitativa försök visade, att hastigheten växer med temperaturen. Inom området 16° —20° C kunde dock ingen temperatureffekt fastställas.

De minsta blåsorna stego med noggrant konstant hastighet i vertikal linje; med växande radie blev banan en skruvlinje kring vertikallinjen, och för de största blåsorna tillkom som normalt fenomen livliga oscilleringar kring en vågrät axel.

Minsta och största radien hos de undersökta blåsorna var 0,009 och 0,111 cm respektive. Detta område är av intresse, därför att de luftblåsor, som bruka sätta sig på väggarna av ett kärl med stillastående vatten, ha radier, som sällan överskrida 0,1 cm. Dessutom ha, såvitt jag känner, inga mätningar publicerats för stighastigheten hos luftblåsor i vatten med radier mellan 0,0385 cm och 0,120 cm.

Det viktigaste resultatet av mätningarna var att en luft-

blåsa med radien r, belägen mellan gränserna 0,009 cm och 0,07 cm, stiger i vatten av rumstemperatur med en hastighet v cm/sek, som bestämmes av ekvationen

$$v = 233r - 0{,}67 .$$

Denna ekv. stämmer ganska väl överens med ALLENS formel, som för vatten av 18° ger $v = 225r - 0{,}72$.

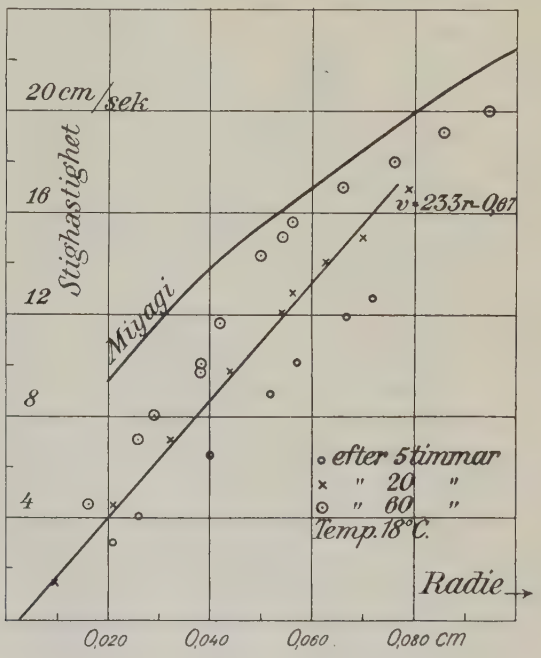


Fig. 2. Kolsyreblåsors stighastighet i vatten.

Sedan radien överstigit värdet 0,07 cm, växer hastigheten vida långsammare, men detta beror säkerligen till god del på att för större blåsor banamplituden ej är liten i förhållande till det använda stigrörets diameter.

Vid några försök blandades vattnet i bägaren med vichyvatten, varvid kolsyreblåsor i riklig mängd satte sig på glasväggen. Dessas stighastighet mättes då och då vid konstant temperatur och utan rubbningar av apparaten. Man erhöll alltid diagramlinjer av formen $v = ar - b$, men kon-

stantvärdena ändrades med tiden. Vid ett tillfälle, då apparaten innehöll destillerat vatten, ökades a under loppet av 1 dygn från 177 till 233. Då försöket repeterades med vattenledningsvatten av hårdheten 10 (tyska) grader, erhölls ungefär samma låga begynnelsevärde som förut, men slutvärdet blev omsider 303. Fig. 2 visar, hur diagramlinjerna vid ett annat försök med CO_2-blåsor i vattenledningsvatten ändrat sig, sedan 5, 20 och 60 timmar förflutit från vichyvattnets ihällande. De låga hastigheterna bero helt enkelt på koldioxidens absorption i vattnet. Man brukar kunna direkt iakttaga, hur blåsorna krympa ihop under vägen genom röret. Svårare är det att förklara de hastigheter, som ligga över normallinjen (med $a=233$). Effekten beror kanske på att gasblåsan omgiver sig med ett i början mjukt, men sedermera stelare molekyllager. Miyagi har upptagit kinematografiska bilder av uppstigande luftblåsor, vilka visa, att blåsan undergår ständigt växlande deformationer. En lätt deformerbar gasblåsa bör under i övrigt lika förhållanden stiga långsammare än en, som i mindre grad avviker från den sfäriska utgångsformen.

Kvicksilverhalogenidernas elektrolytiska dissociation.

Av HELMER BÄCKSTRÖM.

Moll behandlar i sin lärobok i kemi kvicksilversalternas dissociationsförhållanden relativt utförligt. Han angiver också några försök, alla lätta att utföra och ägnade att belysa den intressanta tillämpning av dissociationsteorien, som här kan vinnas. Det är först och främst värmetoningen vid blandning av merkurinitrat- och koksaltlösningar, vidare den ringa ledningsförmågan hos kvicksilverklorid- och cyanidlösningar samt den normala fryspunktsnedsättningen för dessa salter. Till ytterligare belysning av jonernas fåtalighet i vissa kvicksilverlösningar plägar jag låta

eleverna utföra ett litet försök, som jag ej funnit omnämnt i de vanliga läroböckerna, men som på grund av sin dras tiska karaktär är ägnat att ådraga sig elevernas intresse och därför av dem minnas. Försöket utföres på följande sätt.

Sedan jag visat, huru ett kopparstycke, nedfört i en kvicksilversaltlösning (ej klorid eller cyanid), utfäller kvicksilver på sin yta, tager jag fram tre centimeterbreda remsor kopparbleck. Tre elever tillsägas att komma fram. De erhålla var sin kopparremsa samt ett provrör med en kvicksilversaltlösning, vilken dock är olika för de tre eleverna. Den ena erhåller sålunda exempelvis en nitratlösning, den andra en sublimatlösning och den tredje en cyanidlösning. Därjämte får var och en taga litet trassel för kopparremsornas putsning. De tillsägas nu att upprepa det av mig gjorda försöket. En tävling uppstår därvid, i vilken vinstchanserna äro synnerligen ojämnt fördelade. Den med kvicksilvernitratlösningen arbetande eleven behöver cirka 10 sekunder för att neddoppa sitt kopparbleck i lösningen och avtorka detsamma, varefter han triumferande kan visa klassen dess silverglänsande yta. För den, som arbetar med sublimatlösningen, går det mycket långsammare. Han får ideligen doppa ned sitt bleck i lösningen och därefter förgäves gnida detsamma. Först efter 3—5 minuter visar sig i bästa fall en svag »försilvring» av ytan, dock långt svagare än den med kvicksilvernitratet på några sekunder erhållna. Vad slutligen den med kvicksilvercyaniden arbetande eleven angår, så nödgas han i allmänhet giva upp försöket utan att ha kunnat prestera minsta antydan till »silver»-glans på sitt bleck. Även om blecket får stå kvar i cyanidlösningen och granskas efter flera timmar, ja t. o. m. dagar, så visar det sig i regel lika oförändrat. Dock kunna förhållandena i detta hänseende något variera vid olika preparat. I varje fall är denna lilla hastighetstävlan synnerligen ägnad att fästa sig i elevernas minne och torde därför med fördel kunna utnyttjas vid sidan av övriga hithörande försök.

Biokemiska arbetsmetoder och problem.

Av SAMUEL HENNICHS.

(Forts.)

II. Reaktionsmekanismen vid biologiska oxidationer.

I organismen försiggår förbränning av kolhydrater, fett och äggviteämnen i syfte dels att upprätthålla kroppstemperaturen, dels att lämna nödig energi för organismens olika förrättningar.

Calvo Criado har visat, att vid kroppsligt arbete stegringen av respirationskvoten betingas av energi, frigjord genom kolhydratens förbränning.

Syret, som erfordras för dessa oxidationer, transporteras från lungorna till de olika organen, och under denna transport är det bundet vid hämoglobinet, ett järnhaltigt ämne, vars kemiska sammansättning sedan länge är känd. Det visar för övrigt så stora analogier med klorofyll, att ur de båda ämnena samma spjälkningsprodukter kunna erhållas.

Det finnes alltså i ett organ representanter för de tre huvudgrupperna organiska ämnen i förvar tillsammans med molekylärt syre. Temperaturen är 37°. Vid denna inträder vanligtvis ingen oxidation. I själva verket föreligger här ett utomordentligt intressant biokemiskt problem.

För att kunna förklara, att oxidation inträder trots den relativt låga temperaturen, kan man gå två vägar. Antingen antager man, att substratet (det ämne, som skall förbrännas) omvandlas till ett ämne, som är lättare tillgängligt för oxidation än substratet självt, eller också söker man förklaringen i antagandet, att syrets oxiderande förmåga stegras genom detsammas överförande i någon aktivare form än den molekylära. Man har försökt sig på båda delarna.

Den första förklaringen, att alltså ifrågavarande ämnen

nedbrytas till mera lättoxidabla substanser, har befunnits vara den riktiga, åtminstone när det gäller första fasen av oxidationen.

Innan den slutliga oxidationen inträder, försiggå nämligen vissa förberedande reaktioner, vilka äro gemensamma för såväl andning som jäsning. Dessa påverkas ej av syrets närvaro. Först när subtratets förberedelse är avslutad, reagerar syret.

Vad nu först oxidationen av kolhydrat beträffar, föregås denna av hydrolys av eventuellt förekommande högpolymeriserade eller sammansatta kolhydrat till hexoser.

Vid den fortsatta nedbrytningen har insulinet visat sig vara erforderligt som katalysator. Genom insulinet minskas sockerhalten i blodet och vävnaderna samtidigt. Denna inverkan skulle kunna förklaras genom antagandet av antingen en stegrad sockerspjälkning eller minskad sockerbildning ur glykogenet. En närmare undersökning av saken har ådagalagt, att det första alternativet föreligger. Nu uppställer sig frågan: vilken delreaktion av kolhydratspjälkningen katalyseras av insulinet?

En tid trodde man, att insulinet vore identiskt med Co-zymasen i jästen, men man antager numera, att insulinets verkan består däri, att det utgör aktivator för det okända enzym, som åstadkommer omlagring av α-β-glykos till den form av glykos, som bildas vid glykogenspjälkningen, benämnd »bioglykos».

Vad insulinet självt beträffar, tror man sig hava erhållit det i kristallform. Det har vidare underkastats omkristallisation, utan att aktiviteten förändrats. Den empiriska sammansättningen skulle vara: $C_{45}H_{75}O_{17}N_{11}S$. Huruvida detta av Abel beskrivna preparat är rent eller ytterligare kan aktiveras är okänt. Preparatet består av äkta äggviteämnen.

Bioglykosen undergår sedan glykolys, d. v. s. spjälkning till mjölksyra. Den senare har påvisats i muskulatur, och dess koncentration stiger med trötthetен.

Ett av de första stegen vid glykolysen är bildningen av hexosfosfater, nämligen hexosmonofosfat och sedan difosfat

(zymofosfat). Fosfats närvaro är alltså en lika nödvändig förutsättning för andning som för jäsning.

Längre än till bildning av mjölksyra har man icke kunnat följa nedbrytningen av kolhydrat i organismen.

Hill och Meyerhof hava visat, att värmetoningen vid muskelryckningen förlöper i två avdelningar. Den första, samtidig med det mekaniska förloppet — spännings- och formförändringen — är fullkomligt oberoende av syrenärvaro, den efterföljande, återhämtningsfasen, förutsätter närvaro av syre.

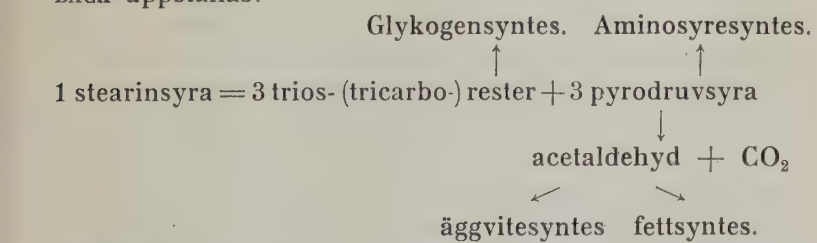
De två faserna i värmetoningen motsvara skilda kemiska reaktioner. I fas I — den anaeroba fasen — bildas mjölksyra av glykogen, i fas II — den aeroba fasen — förbrukas denna mjölksyra dels genom oxidation dels genom återbildning av glykogen.

Vid uteslutning av fas II genom avstängning av syretillförseln kan visserligen muskeln fortsätta att arbeta, i det att mjölksyran diffunderar bort. Denna möjlighet är emellertid tämligen begränsad.

I analogi härmed skulle all oxidativ nedbrytning vara kopplad med motsvarande syntetiserande reaktion.

Oxidationen av fett synes stå i samband med andningen. Härvid har man funnit, att oxidationen ej leder direkt till bildningen av kolsyra, utan att trelediga kolföreningar bildas, vilka tillsammans med mjölksyra bilda glykogen.

Följande schema kan enligt H. von Euler och K. Myrbäck uppställas:



Detta är emellertid ej den enda vägen, på vilken fetter kunna spjälkas i organismen. Det bör finnas åtminstone ännu en möjlighet, t. ex. följande:

Fettsyra → nonylaldehyd → ketosmörsyra → äppelsyra + CO_2

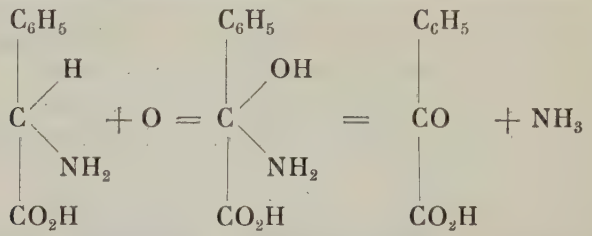
↓

fumarsyra

↓

bärnstenssyra.

Vad spjälkningen av aminosyror beträffar, har Ehrlich funnit, att dessa kunna jäsa under utveckling av ammoniak och kolsyra till alkoholer med närmast lägre antal kolatomer. Härvid bildas intermediärt motsvarande ketonsyra.



Samma spjälkning i djurorganismen leder till fettsyror med närmast lägre antal kolatomer.

En central roll spelar pyrodruvsyra. Den utgör mellanled vid kolhydratens omvandling till mjölksyra. Den kan bildas av bärnstenssyra via fumarsyra → äppelsyra → oxalättiksyra, vidare genom desamidering av alanin och ur asparaginsyra över oxalättiksyra. Nästa steg skulle vara dekarboxylering av de bildade syrorna.

Vid oxidationen av alanin bildas acetaldehyd och ättiksyra. Av aminosyrorna bildas ammoniak, som med kolsyra bildar ammoniumkarbonat. Vid dettas överförande i urinämne har man antagit ammoniumkarbamat som mellanled: $H_2N\ COONH_4$. Urinämne synes även kunna uppstå sålunda: Vid oxidationen av aminosyror bildas grupper — $CONH_2$, som kunna förenas med NH_2-grupp till urinämne.

Fett och äggviteämnen kunna sålunda bilda kolhydrat och tvärtom. Detta förhållande är en nödvändig sak för upprätthållande av en lämplig jämvikt i organismen mellan dessa trenne ämnesgrupper.

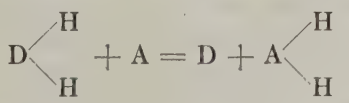
Wielands och Warburgs teorier om oxidationsmekanismen i kroppen.

Efter dessa förberedande reaktioner följer den slutliga oxidationen.

Angående reaktionsmekanismen härvid hava Wieland och Warburg utvecklat närmare föreställningar, som mera behandla de stora principerna för densamma än angiva några konkreta uppgifter om de reagerande ämnena. Den förre (tilldelad nobelpris under år 1928) tillskriver de reducerande och vätesuperoxidspjälkande enzymen stor betydelse härvid. De förra kallas *reduktas* eller dehydrogenas, det senare *katalas.*

Ehuru ett rikhaltigt försöksmaterial ådagalagt, att katalashalten hos ett organ icke kan tagas till måttstock på ämnesomsättningens intensitet hos detsamma, och även om de förändringar, katalashalten under växlande fysiologiska förutsättningar undergår, ej löpa parallellt med syreförbrukningen, och om man vidare ej kan tillskriva enzymet katalas någon oxidativ uppgift, lider det dock intet tvivel, att enzymet katalas står i genetiskt sammanhang med oxidationsprocessen i kroppen.

Thunberg och Ahlgren liksom även Sergius Morgulis ansluta sig till den Wielandska oxidationsteorien, enligt vilken alla oxidationer komma till stånd genom väteavsöndringar ur förhandenvarande ämnen. Detta frigjorda väte oxideras sedan genom en lämplig »acceptor».



D = donator, A = acceptor.

Som donatorer hava använts bland andra bärnstenssyra och zymofosfat, som acceptor metylenblått.

Det gives talrika exempel på att, i händelse acceptorn (det väteupptagande ämnet) består av molekylärt syre, vätesuperoxid bildas som biprodukt vid reaktioner utanför

organismen. Detta skulle enligt WIELAND vara fallet även vid oxidationsprocesser i kroppen, och katalasens uppgift skulle därför vara att förhindra en anhopning av detta ämne i mängder, vilka vore skadliga för organet. Detta bortskaffande av vätesuperoxid skulle även kunna verka befordrande på oxidationens hastighet.

$$D\begin{matrix}H\\H\end{matrix} + O_2 = D + H_2O_2(\text{reduktas})\ H_2O_2 = H_2O + O(\text{katalas}).$$

Denna teori härstammar från LOEW, ehuru WIELAND genom sina dehydreringsförsök givit en åskådlig bild av vätesuperoxidens bildningssätt.

Vätesuperoxids skadlighet för levande organisk vävnad har blivit mycket olika bedömd.

»Vi tro», skriver WIELAND, »att redan nu en ytterligare mycket utbredd enzymverkan låter hänföra sig till detta reaktionssystem (oxidoreduktionssystemet i organismen) nämligen den katalytiska sönderdelningen av vätesuperoxid i vatten och syre, vilken genom den så kallade katalasen blir utomordentligt kraftigt påskyndad.»

Enligt WIELANDS teori är, såsom nyss framhållits, vätesuperoxid den första produkten av det molekylära syret. Det måste även under andningen i första hand bildas vätesuperoxid i organismen, nämligen genom oxidation av aktiverat väte med molekylärt syre som acceptor.

Tioårslång diskussion om problemet angående katalasens fysiologiska betydelse har icke kunnat frambringa någon teori av tillnärmelsevis samma räckvidd, som den WIELAND uppställt. Detta förhållande torde kunna få anses såsom ett av de starkaste stöden för denna teori. Enligt WARBURG skulle enzymet katalas vara en järnförening, men frågan om dess fysiologiska uppgift synes därmed icke bliva besvarad.

Ehuru vätesuperoxid är en biprodukt vid många oxidationer, har dess förefintlighet icke kunnat påvisas i något organ, trots ivriga försök i den riktningen. Vidare har

H_2O_2-s skadlighet för den organiska vävnaden troligtvis överskattats. Härmed faller likväl icke teorien om dess intermediära bildning, då spjälkningen kan inträda omedelbart.

Enzymet katalas äger en mycket större känslighet för blåsyra, än den reduktas uppvisar. Vid ett organs blåsyreförgiftning skulle på denna grund det H_2O_2-bildande enzymet icke bliva förgiftat, men däremot det H_2O_2-spjälkande, varför resultatet bleve, att H_2O_2 skulle anhopas och således borde det kunna påvisas. Det är ej fallet. Emellertid förhåller sig katalas betydligt annorlunda in vitro än in vivo, varför känsligheten i förra fallet mycket väl kan vara mindre än i det senare.

Det har visat sig, att varje oxidation löper parallellt med eller till och med betingas av en reduktion och vice versa. Därför spela reduktionsprocesserna vid ämnesomsättningen i organismen säkerligen en stor roll, även om man för närvarande förfogar över blott ett begränsat antal exempel härpå.

Den enzymatiska dehydreringen av alkohol till aldehyder och vidare till syror är känd sedan gammalt. Dehydrering av bärnstenssyra har visat sig spela en betydande roll vid nedbrytningen av fettsyror. Bärnstenssyra är en god »donator» av väte.

Beträffande kolhydraten har Wieland funnit, att även glykos kan genom jäsning av ättiksyrebakterier vid närvaro av metylenblått förbrännas syrefritt till koldioxid och vatten. Ahlgren finner likväl, att α-β-glykos icke är någon väteframbringare direkt, utan spjälkas i mjölksyror.

Warburg har under de senare åren genom en serie avhandlingar huvudsakligen i »Biochemische Zeitschrift» förfäktat en annan teori angående den biokemiska oxidationen, som gör gällande, att järn i förening med ett organiskt ämne vore katalysatorn för oxidationsprocesserna. Härvid stöder sig Warburg på en lång rad undersökningar.

Warburg har själv, delvis jämte medarbetare, synnerligen ingående studerat oxidationen av äggviteämnet cystin med

syre och MERCKS djurblodkol som katalysator. Produkterna vid denna reaktion visade sig vara desamma som vid motsvarande reaktion i levande organisk vävnad, nämligen: kolsyra, vatten, ammoniak och svavelsyra. Liknande försök med tyrosin och leucin utföllo positivt, med socker, fettsyror, mjölksyra och äppelsyra däremot negativt.

De reagerande ämnena bliva enligt WARBURGS mening vid dessa reaktioner aktiverade genom adsorption till kolet, vilket bevisades genom förgiftningsförsök. Av utslagsgivande betydelse för oxidationsaktiviteten hos en kolsort visade sig likväl dess järnhalt vara, ehuru någon proportionalitet mellan dessa storheter icke kan spåras.

I här ovan refererade försök ser WARBURG förebilder till oxidationen i kroppen. Med hänsyn till det faktum, att järn är nödvändigt för cellernas liv, visar han experimentellt, att järn i kol och i levande celler åstadkommer en syreförbrukning av samma storleksordning, beräknad per vikt och tidsenhet. I full analogi höjer sig cellernas andning genom tillsats av järn, och HCN är ett specifikt gift för dem.

Järnet måste dock befinna sig i någon organisk förening. WARBURG påstår till och med, att samtliga reaktioner, som i särskilt hög grad bliva förgiftade genom HCN, äro katalyserade av järnföreningar. Aktiveringen sker även här genom adsorption.

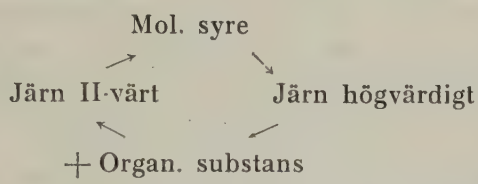
För WARBURGS teori talar onekligen den omständigheten, att oxidationen av bärnstenssyra med molekylärt syre förgiftas genom blåsyra, men icke motsvarande oxidation med metylenblått.

Å andra sidan fordrar denna teori, att en oxidativ ämnesomsättning, vilken katalyseras genom en järnförening, blir förgiftad genom en blåsyremängd, som står i proportion till förhandenvarande järnmängd. Häremot föreligga dock negativa bevis.

Så finner HENNICHS vid renframställning av enzymet katalas, att känsligheten för blåsyra ej stiger i samma grad som aktiviteten, och att inga som helst stökiometriska förhållanden föreligga mellan järnmängd och blåsyremängd.

HCN skulle för övrigt lika väl kunna vara en specifik förgiftare för en aktiv karbonylgrupp.

Förbränningen i den levande cellen försiggår enligt WARBURG i gränsskiktet mellan det flytande innehållet i cellen och de fasta strukturdelarna. På denna plats skulle alltså järnet förmedla organiska ämnens syresättning och detta enligt följande schema:



Det första ledet i denna ring, uppoxidering av tvåvärdigt järn till högvärdigt, låter sig lätt realiseras. Så upptaga vissa komplexa järnföreningar, såsom järnpyrofosfat, citrat och fast järnhydrat, molekylärt syre under oxidation. Men dessa reagera icke med organisk substans. Härtill erfordras vidare, att järnet befinner sig i särskild form.

Angående kolhydratens oxidation finner WARBURG, att fruktos är autooxidabelt i fosfatlösning vid närvaro av spår av järn. Då järnet är i förening med en sulfhydrylgrupp, visar det sig särskilt aktivt för oxidation av fett.

Ehuru förbränningsproblemet genom de WARBURGska försöken belysas från en ny sida, torde det kunna sättas i fråga, om man i desamma kan se exempel på andningen i organismen. För det första är äggviteämnenas förbränning av underordnad betydelse i förhållande till fetternas och kolhydratens. För det andra bliva de förhandenvarande ämnena säkerligen icke förbrända med sina okluvna molekyler, utan, såsom förut framhållits, genomgå de först en rad omvandlingar och spjälkningar, innan de slutligen fullständigt oxideras.

Då WARBURG lägger WIELAND till last, att denne ensidigt räknar med vätets aktivitet, skulle man kunna anföra detsamma mot honom, ehuru det här gäller syrets aktivering.

H. VON EULER angiver det nuvarande läget i fråga

om motsättningen mellan WARBURGS och WIELANDS uppfattningar om reaktionsmekanismen vid oxidationen på följande sätt:

»Om man också livligt måste instämma med WARBURG, att järnets oumbärlighet för levande vävnad i främsta rummet gör sig gällande vid oxidationen med molekylärt syre — vilken uppfattning WARBURG själv stöder genom sina lika intressanta som ingående förgiftningsförsök — och om man också måste beteckna det såsom mycket sannolikt, att härvid syret genom intermediär bindning till en komplex järnförening, t. ex. ett cytokrom eller dylik katalysator, kommer i ett mera reaktionsbenäget tillstånd, är det dock ännu ej känt, huru man skall kunna förklara:

att glykos icke låter sig oxideras direkt med syre under förmedling av någon sådan järnkomplex, eller

att de enzym, som katalysera de inledande gemensamma reaktionerna vid andning och jäsning, icke innehålla ifrågavarande järnkomplexer eller överhuvudtaget järn.

Att tvärtom de enzym, som åstadkomma oxidoreduktionen av socker icke innehålla järn blir mycket troligt genom den omständigheten, att blåsyra icke förgiftar enzymet hexos-dehydrogenas (-reduktas), och att systemet dehydrogenas-Co-zymas vid underskott av Co-zymas av blåsyra kan nedbringas till halva sin aktivitet, men att aktiviteten regenereras vid tillsats av mera Co-zymas.»

»Ur det försöksmaterial, som ligger till grund för diskussionen av sockrets oxidation vid andningen, kan man draga följande slutsats:

Ett och endast ett ämne av dem, vilka uppträda som oxidationskatalysatorer vid det molekylära syrets reaktion med omvandlings- och spjälkningsprodukter av zymohexoser, blir fullständigt eller nästan fullständigt inaktiverat av mycket små mängder HCN, ett förhållande, som redan framgår av WARBURGS egna försök; detta tyder ur WARBURGS synvinkel på att denna biokatalysator är en järnkomplex.

Det föreligger emellertid tills dato intet skäl för att räkna

denna av blåsyra inaktiverbara katalysator till enzymen, såsom Willstätter framhållit.

Den vid andningen verksamma Co-zymasen har ett förhållande till blåsyra, som icke giver anledning till att förmoda någon järnhalt hos detsamma. Härför talar ej heller de å preparaten företagna järnbestämningarna.

Den här berörda diskussionen beträffande Warburgs och Wielands teorier innefattar också en annan fråga, nämligen den, om dessa komplexa föreningar med syre, som av Warburg antagas ingå bland andningskatalysatorerna, verka genom aktivering av syret, eller om Wielands teori om vätets aktivering tillämpas på dem.

Denna fråga är av reaktionskinetisk art; den kommer att bringas till sin lösning oberoende av enzymforskningen i övrigt.»

Senter konstaterade redan på sin tid, att hämoglobin är indifferent gentemot H_2O_2. Emellertid ha på sistone Kuhn och Brann påvisat, att detta icke är fallet med hämin, det i hämoglobin ingående färgämnet, utan detta kan verka spjälkande på ämnet i fråga.

Häminets derivat, såsom monometylklorhämin och mesohämin, visa emellertid minskad aktivitet.

Detta resultat ställes i en nyligen utkommen avhandling[1] av H. v. Euler och A. Nilsson i samband med påvisandet av hämokromogenlinjer i jäst. Jästens katalasverkan skulle sålunda bero på dess halt av hämin.

v. Euler och Blix hava funnit, att jästens katalasverkan stegras oerhört vid upphettning till 60° under någon tid. Denna effekt får sålunda sin förklaring: Genom upphettningen denatureras en äggvitebeståndsdel hos den naturliga katalasen. Aktiveringen skulle sålunda vara att jämföra med hämoglobinets övergång till hämin.

De renaste katalaspreparaten uppvisa också en järnhalt nära överensstämmande med hämoglobins.

[1] H. v. Euler och H. Nilsson, Zur Kenntnis der katalatischen Wirksamkeit organisch gebundenen Eisens, Arkiv för kemi, mineralogi och geologi Bd 10, 1929.

Överjäst, som visar större cytokromhalt mot underjäst, är mer katalatiskt aktivt.

Dessa sista erfarenheter lämna sålunda fältet öppet för uppfattningen av katalas som en organisk järnförening i enlighet med WARBURG.

Nu uppställer sig frågan, vari den organiska delen av aktivatorn består.

Häröver kastar den erfarenheten, att pyratin visat sig katalatiskt aktivt, ett visst ljus.

Pyratin kan framställas av hämin och resorcin genom smältning och innehåller sålunda järn bundet till pyrrolkväve. Aktiviteten är emellertid försvinnande i förhållande till den naturliga katalasens.

Det återstår emellertid att undersöka, huruvida den naturliga katalasen kan tilldelas en analog kemisk sammansättning, och vari orsaken ligger till dess högre aktivitet.

Litteraturförteckning.

VON EULER, *Chemie der Enzyme*, I och II.
HAMMARSTEN, *Lehrbuch der physiologischen Chemie.*
Den kemiska tidskriftslitteraturen t. ex.:
VON EULER, MYRBÄCK und NILSSON, *Neuere Anschauungen über dem enzymatischen Kohlenhydratabbau. Ergebnisse der Physiologie 26*, 531, 1928.
VON EULER, *Enzymchemische Beiträge zur Kenntnis des gekoppelten Fett- und Kohlehydratstoffwechsels,* Biochem. Zeitschr. *18*, 164, 1925.
VON EULER und NILSSON, *Der gegenwärtige Stand des Insulinproblems nach biochemischen Ergebnissen in vitro.*
KNOLLS, *Mitteilungen für Ärzte,* juli 1928.
S. HENNICHS, *Zur Kenntnis der Katalase und ihrer Beziehung zu biologischen Oxidationen,* Inaug. Diss. Stockholm 1926.

(Forts.)

Bokanmälningar.

ELMER E. BURNS, *Radio, A study of first principles.* D. Van Nostrand Company, Inc. New York 1928, 255 sid., 2 dollar.

Ovannämnda arbete är en elementär lärobok i radioteknik avsedd för såväl skolbruk som självstudium. Författaren utgår från den givetvis riktiga förutsättningen, att den som grundligt vill sätta sig in i radiotekniken och vinna förståelse för dess problem tydligtvis även själv måste rent praktiskt syssla med konstruerandet och byggandet av apparater. I överensstämmelse härmed får läsaren i bokens första kapitel göra sig förtrogen med några typiska enklare mottagares byggnad och konstruktion. Först därefter följer en framställning av de fysikaliska lagar i elektricitetsläran, som utgöra grundvalen för elektrotekniken. Sålunda behandlas elektriska element, strömmens magnetiska verkningar, Ohms lag och i sammanhang därmed volt- och ampèremetrar, motståndsmätning m. m. Sedan detta kunskapsstoff inhämtats, anses tiden vara mogen för en mera detaljerad beskrivning av konstruktion, verkningssätt och karakteristiska egenskaper hos olika slag av elektronrör. Därefter kommer växelströmsläran, av vilken särskilt de på radiotekniken tillämpliga delarna äro mera ingående behandlade. På grundval härav följer sedan en grundligare redogörelse för såväl sändare- som mottagarekretsar, varefter boken avslutas med ett kapitel om de inom radiotekniken vanligaste mätningsmetoderna.

Framställningen i boken är i alla avseenden klar, och texten är illustrerad med från vederhäftiga källor hämtade och väl valda kurvor och diagram. Arbetet tynges ej av matematiska formler och deduktioner; endast i några särskilt viktiga fall ha sådana kommit till användning. Svårigheterna att på ett tillräckligt populärt sätt klargöra vissa elektriska företeelser och begrepp, som ej kunna undvikas i ett arbete av ifrågavarande slag, ha på ett förträffligt sätt övervunnits genom jämförelser med mekaniska analogier.

Boken är därför otvivelaktigt en mycket god handledning på området för nybörjaren, för så vitt naturligtvis han behärskar språket. Den är emellertid dessutom tillräckligt djupgående för

att ha åtskilligt att bjuda även åt den mera försigkomne, och på grund av dess pedagogiska förtjänster torde den även kunna rekommenderas åt lärarna i fysik. *Nils Åkesson.*

K.-G. HAGSTRÖM, *Talens vetenskap.* Särtryck ur *Kunskap, Universitet för alla,* IV. Stockholm, Albert Bonnier 1929. 83 sid., häft. kr. 3:75.

Kan matematiken — frånsett dess mest elementära partier — populariseras, kan man ge en allmänfattlig, tilldragande framställning av frågor, som ligga inom området för nutida matematiska undersökningar? Att uppgiften icke är hopplös, har bl. a. NÖRLUND visat i sin förträffliga lilla skrift »Bland siffror och tal». Det av fil. d:r K.-G. HAGSTRÖM nu för *Kunskap* skrivna arbetet har ej kunnat bli i samma mening populärt, ty det avser att ge inblickar i mycket mer av det matematiska forskningsfältet, än vad NÖRLUND berört. Det går inte heller för vem som helst att följa denna »universitetsundervisning» i dess helhet. Men om man alltefter sina matematiska förutsättningar tar för sig mer eller mindre av det myckna, som här bjuds, — innehållet bildar ej ett så sammanhängande helt, att allt ramlar sönder, om vissa kapitel uteslutas — så får man lära sig en hel del och, något som ju är minst lika viktigt, lust att få veta mer. Ty så är boken skriven, i allmänhet utan vidlyftiga utredningar men med klar belysning av problemställningen och medryckande stil. Vissa partier äro lätt tillgängliga för snart sagt vem som helst, så t. ex. kapitlen om räkneord och taltecken, om positionssystemet, om Euklides och geometrien, ja även om de icke-euklideiska geometrierna. Andra delar åter kräva, om icke nämnvärda matematiska kunskaper, så åtminstone ett utvecklat sinne för abstrakt tänkande, t. ex. talbegreppet och dess utvidgning, det matematiska oändlighetsbegreppet, mängdläran. I en del fall har författaren måhända gjort framställningen onödigt svår för i ämnet mindre initierade, t. ex. vissa delar av kapitlet om funktionsbegreppet. Såväl detta viktiga kapitel som de båda kringstående, om infinitesimalkalkylen och om sannolikhetskalkylen, hade gärna kunnat göras fylligare, till tjänst för det helt visst ej ringa antal läsare, som skulle önska något större klarhet över hithörande frågor, vilka ju ofta komma på tal. En motsvarande inskränkning rörande sådana saker som abacusräkning och logikkalkyl hade knappast känts som en brist. Men urvalet i ett arbete av ifrågavarande art blir ju alltid i viss mån en smaksak, och i det hela måste man ge författaren livligt erkännande för det sätt, på vilket han löst sin uppgift.

Helt naturligt äro härledningar, där sådana förekomma, ej utförda i detalj, utan mer antydda i huvuddrag. Beträffande ett par satser rörande talkongruenser kunna författarens resonemang knappast godtagas i den form, i vilken de framställts. Någon gång kunde man också önska ett försiktigare bruk av det förrädiska ordet »tydligen» eller att något »lätt inses». Även vid en popularisering av matematiska utredningar är uttrycket »det kan bevisas» avgjort att föredraga.

Historiska notiser och ett flertal goda illustrationer, särskilt porträtt, förhöja bokens värde och det verkliga nöje man har av dess läsning.

Olof Josephson.

Två biografier.

C. A. BJERKNES, *Niels Henrik Abel.* En skildring av hans liv og arbeide. Omarbeidet og forkortet utgave i anledning av 100-aarsdagen for Abels død, ved V. Bjerknes. Oslo, H. Aschehoug, 1929. 155 sid., häft. kr. 3: 50.

S. BRODETSKY, *Isaac Newton.* En kort beskrivning av hans liv och verk. Med förord av professor C. V. L. Charlier. Lund, C. W. K. Gleerup, 1928. 171 sid., häft. kr. 4: 75.

Den nya upplagan av BJERKNES' Abelbiografi vänder sig till en större allmänhet, och utgivaren, professor V. BJERKNES, har därför uteslutit åtskilligt, som varit njutbart endast för matematici av facket. I gengäld är det rent biografiska stoffet utökat, bl. a. med talrika utdrag ur Abels efterlämnade brev. Man får också en levande och gripande bild av Abels livsöde, så beklämmande, om man ser på dess yttre gestaltning, men så enastående betydelsefullt för den matematiska vetenskapen. Även om huvudvikten således lagts vid själva biografien, kan man dock se utvecklingen av några bland Abels mest lysande upptäckter. Sålunda grep sig Abel redan under skoltiden an med femtegradsekvationerna och trodde sig ha funnit en allmän lösningsmetod. Hans försök sändes av professor HANSTEEN till Köpenhamn för att eventuellt framläggas för danska vetenskapssällskapet. Mottagaren, professor DEGEN, insåg nog, att metoden ej höll streck, han önskar en fullständigare deduktion samt kontroll genom något sifferexempel. Samtidigt ger han uttryck åt en förhoppning, att en sådan kapacitet, som Abel i varje fall visar sig vara, hellre skall ägna sina krafter åt ett mindre sterilt område av matematiken, och han rekommenderar särskilt studiet av *de elliptiska transcendenterna.* Det lider intet tvivel, att detta uttalande haft en avgörande betydelse för Abel. Han

författar redan vid 20 års ålder en mindre avhandling rörande *de elliptiska integralernas omvändning*. Problemställningen ligger således redan då klar för honom. Han arbetar emellertid också fortfarande på femtegradsekvationens gåta — det första försökets felslut hade han rätt snart insett — och såsom 22-årig student framlägger han sitt omöjlighetsbevis. SCHUMACHER fick del av avhandlingen och sände den till GAUSS, som dock ej synes då ha trott på Abels resultat. Han teg, och detta föranledde att Abel gentemot Gauss kom att hysa en misstämning, som han knappast övervann. Då Abel följande år anträdde sin tvååriga utlandsresa, var syftet bl. a. att besöka GAUSS och CAUCHY. Men något besök i Göttingen blir ej av. Och även mötet med Cauchy blir en besvikelse, måhända Abels största. Hans stora, sedermera så berömda avhandling »Sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes», som han lämnar Cauchy i hopp att få den införd i »Mémoires des Savants Etrangers», blir liggande bland Cauchys papper och först 15 år efter Abels död befordrad till trycket. — Så mycket större omedelbar betydelse fick hans sammanträffande i Berlin med CRELLE, vilket ju resulterade i grundandet av *Crelles Journal*. Av synnerligt intresse i biografien är också förhållandet mellan Abel och JACOBI, särskilt berörande de stora upptäckterna på de elliptiska funktionernas gebit, samt uttalanden av Abel beträffande ytligheten i en mängd matematiska undersökningar, icke minst det lättvindiga användandet av divergenta serier — »Divergente Ræcker ere i det Hele noget Fandensskab, og det er en Skam at man vover at grunde nogen Demonstration derpaa. Man kan faa frem hvad man vil naar man bruger dem . . .»

Dessa antydningar må vara nog. Bjerknes' Abelbiografi är ett arbete, för vilket ingen matematiker borde vara främmande. Det är en rik och väckande bok.

BRODETSKY, professor i tillämpad matematik vid universitetet i Leeds, har skrivit sin biografi över NEWTON i samband med 200-årsminnet av dennes död. Biografien vänder sig kanske i främsta rummet till Englands skolungdom. Men genom förträffligt urval bland det föreliggande materialet och sällsynt klarhet i behandlingen har framställningen blivit i hög grad njutbar för var och en som har intresse för den andliga kulturutvecklingen. Boken ger, i klar historisk belysning och med inflikande av en mängd intressanta smådrag, huvudepokerna såväl i Newtons liv som i hans vetenskapliga verksamhet. Framför allt lågo ju Newtons intressen åt det naturvetenskapliga hållet, och när han som ung Cambridgestudent första gången gjorde bekantskap

med Euklides, stod han tämligen ointresserad gentemot dennes spekulativa härledningar. Det var studiet av den tidens algebra och av Cartesii nya metoder, som gav honom idéerna till egna matematiska upptäckter. Inför de stora naturvetenskapliga frågor, som sysselsatte honom, såg han också behovet av bättre matematiska hjälpmedel — och uppfann dem själv. Detta är en av de orsaker, som bidragit till att göra Newtons *Principia* till något så helt annat än en sammanfattning av dåtida kunskap. Den är »i oerhört hög grad författarens egen skapelse». Biografien ägnar ett särskilt kapitel — för övrigt ett av de mest givande i boken — åt detta utomordentliga verk. Världssystemets byggnad, tyngdens och gravitationens problem, de optiska fenomenen och deras förklaring giva huvudinnehållet åt de föregående kapitlen. Bland det rent biografiska är av stort intresse Newtons förhållande till sina landsmän HOOKE och HALLEY. Naturligtvis beröres också den stora prioritetsstriden mellan Newton och LEIBNIZ rörande upptäckten av differentialkalkylen, en strid, som väl kunnat undvikas, om ej Newton varit så ytterligt återhållsam i fråga om att publicera sina upptäckter, »han hade haft alltför liten respekt för sin egen matematiska begåvning».

Newtonbiografien är en ypperlig premiebok, den bör först och främst ej saknas i något lärjungebibliotek, men den ger varje bildad person stort nöje och åtskilligt att tänka på.

Olof Josephson.

Methuens Monographs on Physical Subjects. Methuen & Co. London.

För drygt ett år sedan påbörjade det engelska förlaget Methuen utgivandet av en ny serie små billiga monografier över olika specialområden av fysiken. Till format och omfång motsvara dessa arbeten rätt väl de kända tyska *Sammlung Göschen* eller de franska *Collection Armand Colin.* Liksom nämnda serier äro de avsedda att fylla det med den raska utvecklingen på många områden allt mera stegrade behovet av kortfattade och koncisa, men samtidigt fullt moderna sammanfattande framställningar till överkomligt pris. Författarna till de hittills utkomna volymerna äro alla framgångsrika vetenskapsmän av den yngre generationen, verksamma vid olika universitet och högskolor i England. Varje artikel är sålunda skriven av en forskare, som vid sidan av sin akademiska lärarverksamhet även själv ivrigt deltagit i det vetenskapliga arbetet inom det område boken avhandlar, vilket borgar för att materialet är vederhäftigt och *up to date.*

1. R. C. JOHNSON: *Spectra.* 104 sid. 1928, klotbd. 2 sh. 6 d.

D:r JOHNSONs bidrag till serien omfattar fyra kapitel. Det första har karaktären av en inledning och är ägnat kvantteoriens allmänna principer. De båda följande behandla linjespektra och bandspektra. I det första av dessa redogör förf. för den äldre teoriens kvantiseringsföreskrifter med tillämpning på rotator och oscillator, teorien för vätets spektrum och mera komplicerade spektra, Zeeman- och Stark-effekt samt finstruktur i spektrallinjer. Man kunde här anmärka på, att förf. icke alls berört den nyare kvantmekanikens uppfattning av dessa problem. Denna senare teoris abstrakta karaktär har emellertid gjort, att man alltjämt i många fall håller sig till den äldre atommodellen, där åskådlighet önskas; för övrigt torde mycket av den spektroskopiska systematiken bestå oberoende av det speciella valet av atommodell. Under rubriken »bandspektra» behandlas även isotopeffekten i bandstrukturen och beräkningen av dissociationsvärmet ur spektroskopiska data. Bokens sista kapitel är ägnat den experimentella tekniken på området och innehåller bl. a. en beskrivning av praktiska metoder för våglängdsbestämning.

2. H. T. FLINT: *Wave Mechanics.* 117 sid. 1929, klotbd. 3 sh. 6 d.

För var och en som söker att bilda sig en uppfattning om den teoretiska fysikens nyaste arbetsmetod, vågmekaniken, och vad man med dess hjälp lyckats åstadkomma, kan dr. FLINTs lilla arbete livligt rekommenderas. Det äger i all sin knapphet den för ett sådant arbete synnerligen värdefulla egenskapen att giva den nödvändiga, strängt matematiska behandlingen av uppgiften, samtidigt som det i största utsträckning tillgodoser behovet av en åskådlig tolkning av resultaten, där en sådan överhuvud taget är möjlig. I det senare avseendet finner anmälaren framförallt bokens sista kapitel besitta en särskild tjusning. Förf. behandlar efter en kort inledning uppställandet av vågekvationen ur analogien mellan den Hamiltonska mekanikens och stråloptikens variationsprinciper. Skillnaden mellan fashastighet och grupphastighet vid vågsystem klargöres i ett följande kapitel, och sambandet mellan partikelhastighet och tillhörande våglängd härledes. Den slutliga tillämpningen av den vågmekaniska metoden på speciella atomproblem föregås av en instruktiv framställning av teorien för de därvid uppträdande differentialekvationerna. Bland direkta bevis för materievågornas existens framhållas med rätta de intressanta experimenten av DAVISSON och GERMER över elektronreflexion vid kristallytor. Däremot torde det behöva påpekas, att de i samma kapitel

omtalade resultaten av diffusionsexperiment med elektroner i helium senare visat sig vara förorsakade av störningar på grund av ett olyckligt val av experimentella betingelser vid dessa svåra undersökningar. Bokens sista kapitel bär titeln: The physical significance of the wave equation and the wave function.

3. J. A. RATCLIFFE: *The Physical Principles of Wireless.* 104 sid. 1929, klotbd. 2 sh. 6 d.

Förf. till det tredje arbetet i serien framhåller i sin inledning, att hans framställning är avsedd å ena sidan för vetenskapsmän och undervisare, som ej själva sysslat med hithörande problem, å andra sidan för radioamatören, som önskar taga kännedom om teorien för de effekter han arbetar med. Under betonande av att det sålunda gäller den vetenskapliga grundvalen för radion, behandlar förf. till en början den elementära teorien för elektriska svängningar för att därefter utförligt redogöra för treelektrodröret och dess användningar. I de följande kapitlen om sändare, mottagare, trådlös telefoni och förstärkare behandlas en mångfald olika företeelser; den teoretiska framställningen, med och utan formler, är mycket ofta välgörande enkel och träffande. Här finner man även redogörelser för sådana problem som stabilisering av frekvensen vid sändare genom användning av elektromagnetiska stämgafflar eller kvartsresonatorer. Slutligen ingår förf. även på de intressanta interferensfenomen, s. k. »fadings», som sammanhänga med reflexionen av radiovågorna i det starkt joniserade HEAVISIDE-skiktet i atmosfärens högre delar.

4. K. G. EMELÉUS: *The Conduction of Electricity through Gases.* 94 sid. 1929, klotbd. 2 sh. 6 d.

Den mångfald av fenomen, som sammanhänga med elektriska urladdningar i gaser, bildar ett omfångsrikt kapitel av den moderna fysiken. I stort sett ger föreliggande arbete en rätt fullständig, koncis framställning av de olika urladdningstyperna med framhållande av de för varje typ särskilt karaktäristiska dragen. Att ur det virrvarr av olikartade teorier, som litteraturen på detta område alltjämt företer, sammanfoga en detaljerad tolkning av alla hithörande fenomen torde ännu icke vara möjligt. Förf. har i många fall fått begränsa sig till att angiva de allmänna riktlinjer, som en kommande tolkning sannolikt måste komma att följa. I samband härmed beröras de viktiga lagarna för excitering och jonisation genom elektronstöt. Bland metoder för bestämning av fältstyrkan i olika punkter av en urladdning omnämnas den på studiet av Stark-effekten baserade

och mätningen av avböjningen av ett vinkelrätt mot fältet infört katodstrålknippe. Ett särskilt kapitel har ägnats den nya metoden med sonder, som i sin nuvarande form, sedan teorien fullständigt utarbetats, visat sig vara ett synnerligen värdefullt hjälpmedel.

Erik Rudberg.

OLOF JOSEPHSON, *Planimetri och likformighetslära.* Stockholm 1926, Bonniers förlag, pris kr. 1:90.

I detta häfte av tidskriften finnes intagen en uppsats av lektor JOSEPHSON om det nya latingymnasiets matematikkurser, vari förf. bland annat framhåller, att timantalet, trots ringa reduktion i kursernas omfattning, är väsentligt minskat. Tidsbesparande metoder, koncentration i undervisningen och läroböckernas utformning bli då frågor av högsta vikt. Det kan fördenskull måhända vara lämpligt att erinra om ovannämnda arbete, som på endast ett 80-tal sidor innehåller en för det nya latingymnasiets behov till synes tillräcklig kurs i likformighetslära, planimetri och trigonometri. Denna koncentration vinner förf. genom att tidigt införa de trigonometriska funktionerna för vinklar mellan 0° och 180° samt därefter använda dessa för att bevisa ett flertal geometriska och planimetriska satser. Boken har för övrigt, kompletterad med trigonometriska exempel ur tillgängliga samlingar av studentuppgifter på latinlinjen, med god framgång använts vid ett dimissionsberättigat enskilt läroverk i huvudstaden såväl av förf. själv som av undertecknad.

Joh. P. Pettersson.

R. W. POHL, *Einführung in die Elektrizitätslehre.* Zweite Aufl., Julius Springer, Berlin, 1929, 259 sid., RM 13:80.

Den första upplagan av prof. POHLs bok fick ett utförligt omnämnande i denna tidskrifts junihäfte 1928. Att detta mästerliga arbete, författat av en av tidens skickligaste experimentalfysiker, skulle bli en boksuccé, var ej svårt att förutse. Det har redan översatts till flera främmande språk, och andra tyska upplagan förelåg färdig redan i våras.

En del paragrafer ha omredigerats och fullständigats med material från de senaste årens forskningar, såsom MAX WIENS arbeten angående högkoncentrerade elektrolyter. Det utmärkta illustrationsmaterialet har utökats med ett tjugutal figurer. Sidantalet är i det närmaste oförändrat. Enligt företalet har man att vänta ett nytt arbete av förf., »Optik und Elektrooptik».

Prof. POHLS elektricitetslära är ett standarverk, som varje fysiklärare bör göra sig förtrogen med.

HJALMAR OLSON, *Algebra med planimetri och stereometri.* För latingymnasiet. P. A. Norstedt & Söner (Svenska Bokförlaget), Stockholm 1929. Första delen, 82 sid., pappersb. kr. 2: 60. Andra delen, 86 sid., pappersb. kr. 2: 90.

Första delen är avsedd för det nya fyraåriga latingymnasiets två lägsta ringar och det treåriga gymnasiets andra ring och omfattar alltså algebra, ekvationer och ekvationssystem av första graden, grafisk representation av funktioner, kvadratrötter och ett kap. om räkning med närmevärden samt slutligen den föreskrivna kursen i planimetri och stereometri.

Den andra delen, som är avsedd för latingymnasiets två högsta ringar, omfattar ekvationer och ekvationssystem av andra och högre grad, proportionella storheter, rötter, potenser, logaritmer, en utvidgad kurs i planimetri, serier med tillämpningar på ränteräkning, ett kap. om sannolikhetsräkning ($5^1/_2$ sid.) samt historiska notiser.

Se för övrigt lektor O. JOSEPHSONS uppsats i detta häfte.

K. R. COLLIN, *Algebra jämte exempelsamling.* Omarbetad av lektor SVEN. EM. OHLON. A. V. Carlsons Bokförlag, Stockholm 1929. Förra delen, 108 sid., klotb. kr. 2: 75. Senare delen, 206 sid., klotb. kr. 4: 25.

Första delen anpassar sig liksom OLSONS lärobok till latingymnasiets två lägsta ringar, och här behandlas väsentligen samma kursmoment som i denna, d. v. s. även planimetri och stereometri.

Den senare delen är enligt företalet avsedd att användas i latingymnasiets två högsta ringar men är ej speciellt tillrättalagd för denna linje utan innehåller åtskilligt därutöver med tanke på att den även skulle passa för realgymnasiet och vissa tekniska läroanstalter. Kursmomenten äro därför här avsevärt fler och bredare behandlade än i nyssnämnda lärobok av OLSON. Kapitlen om serier, binnomialteoremet, obestämda ekvationer, heltalsläran, komplexa tal, bestämning av max., min. och kurvors asymptoter ha en bredd motsvarande reallinjens fordringar, likaså kap. om kombinatorik och sannolikhetskalkyl (17 sid.). Den som vill använda denna del på latinlinjen, torde därför få gallra åtskilligt.

Se för övrigt lektor O. JOSEPHSONS artikel i detta häfte.

J. S. HEDSTRÖM och C. RENDAHL, *Algebra* B. För latinlinjen. Del I för första och andra ringen. Albert Bonniers förlag (Svenska Bokförlaget), Stockholm 1929, 85 sid., kart. kr. 1: 90.

Denna del utgör ett separattryck av de 8 första kapitlen i författarnas fullständiga lärobok i algebra, vartill äro fogade de historiska notiserna jämte facit. Läroboken behandlar således ej de föreskrivna kurserna i planimetri och stereometri.

Gradualavhandlingar.[1]

ERIK RUDBERG, *Soft X-Rays and Secondary Electrons*, Kungl. Sv. Vet. Akad. Handl. 3:e ser. Bd. 7, n:r 1. Uppsala 1929, 153 sid. Disp. vid Stockholms Högskola 22 mars 1929. Opponenter: docent A. LINDH, Lund och fil. lic. SVEN BENNER, Stockholm.

Om den anlagda spänningen vid röntgenrör med glödkatod är mycket låg, av storleksordningen 100—1000 volt, förmår strålningen ej längre utträda genom rörväggen eller däri anbragta, tunna metallfönster. Denna mycket mjuka strålning kan fortfarande studeras genom den fotoelektriska effekt som utlöses, om strålningen får falla på en inuti själva röntgenröret placerad metallplatta.

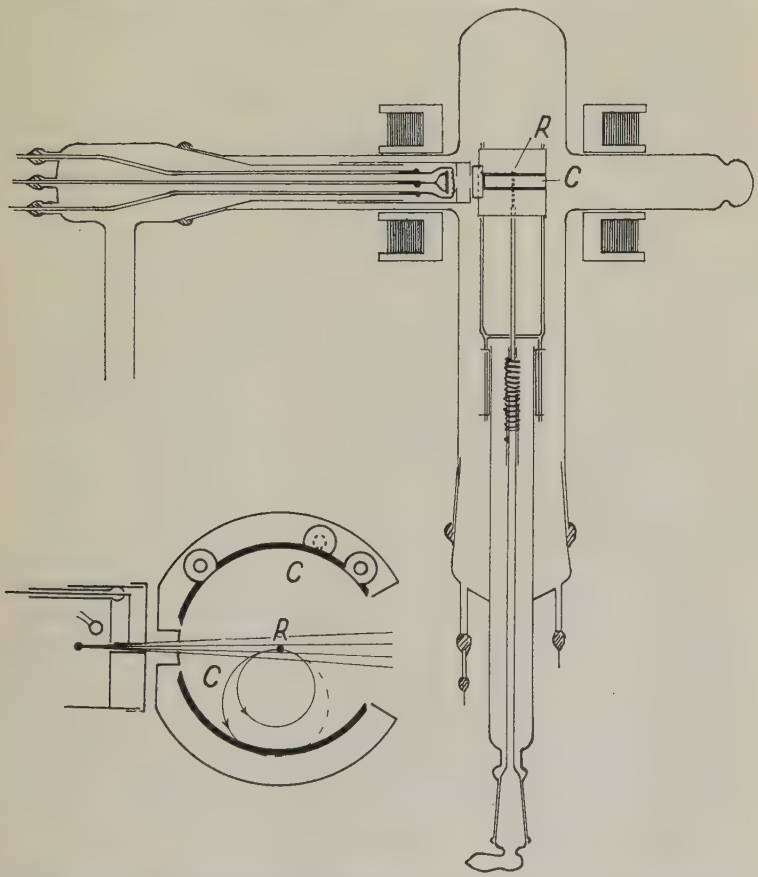
Enligt EINSTEINs fotoelektriska lag, som bekräftats av experiment inom vitt skilda frekvensområden, utträda fotoelektronerna därvid ur metallen med en hastighet vars maximivärde angives genom relationen

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = h\nu - P$$

(h = Plancks konstant, P utträdesarbetet, för de yttersta elektronerna av storleksordningen 5 volt). Förf. söker genom mätning av elektronhastigheterna sluta sig till frekvensen ν av den verksamma strålningen. Hastighetsfördelningen bestämmes till en början genom gradvis utsortering av de lägre hastigheterna medelst ett anlagt elektriskt bromsfält, vars styrka kan varieras. Den metod som visat sig lämpligast, grundar sig dock på magnetisk avböjning av elektronbanorna; figuren visar anordningens väsentliga delar. Strålningen från röntgenröret, i apparatens vänstra sidoarm, infaller genom en serie spalter och en anordning för frånfiltrering av joner på metallstaven R, där den utlöser fotoelektroner. Magnetfältet, parallellt med huvudrörets längdaxel, tvingar de vinkelrätt mot denna emitterade elektronerna att följa cirkelformiga banor med diametern $2mv/cH$. Endast om denna diameter överstiger avståndet till uppfångarelektroden C, registrerar den därmed förbundna elektrometern

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande författares egen hand.

ett utslag. Genom mätningar vid olika fältstyrkor erhålles ett fullständigt hastighetsspektrum för elektronerna. Det visar sig, att huvudmassan utgöres av långsamma elektroner motsvarande en eller ett par volts energi, medan av snabba elektroner, med energibelopp svarande mot röntgenrörets spänning, endast en



ringa mängd förefinnes. Särskilda experiment med elektronbombardemang i en liknande mätanordning visa, att de långsamma elektronerna alstras av primärelektroner av den senare typen såsom ett sekundärt fenomen. I hastighetsspektrum för de snabba elektronerna uppträda diskontinuerliga riktningsändringar, som förknippas med karakteristiska egenfrekvenser i strålningen enligt EINSTEINS formel. Så erhålles med kol-

antikatod en markerad diskontinuitet för en energi av 277 elektron-volt, medan nyare mätningar med plangitter giva värdet 275 volt för kolets Kα-strålning. Liknande försök ha utförts med antikatoder av bor, beryllium och aluminium.

En approximativ beräkning — med användning av experimentellt bestämda absorptionskoefficienter för strålning och elektroner — utvisar, att antalet primära fotoelektroner är detsamma vid bestrålning av en gas som vid en metall. Beträffande processen vid elektronbombardemang av fasta kroppar visar detta, att endast en försvinnande liten del av den tillförda energien re-emitteras såsom mjuk röntgenstrålning, medan en avsevärd del av primärenergien återfinnes i sekundäremissionen av långsamma elektroner från substansen.

I avhandlingens sista del studeras energifördelningen för elektronemissionen från olika element, bombarderade med elektroner vid en spänning av 10—1000 volt. Anordningen för hastighetsmätningen i detta fall överensstämmer i princip med den som användes vid upptagning av β-spektra, varvid elektronerna genom ett magnetfält avböjas i en halvcirkelformig bana, fastlagd genom tvenne smala och en vidare spalt. Elektronerna mätas elektrometriskt bakom utträdesspalten. Dessa spektra visa förekomsten av tre olika grupper av elektroner. En mycket skarp linje, vars läge noga svarar emot de infallande elektronernas hastighet, antyder primära elektroner, som reflekterats fullständigt elastiskt från den beskjutna plattan. Primärelektroner som förlorat större eller mindre belopp av sin energi vid stöten, utgöra den andra gruppen, som är skild från den första genom ett markerat minimum. De egentliga sekundärelektronerna ge upphov till ett starkt markerat maximum inom det lägsta hastighetsområdet. I intet fall visa kurvorna karakteristiska drag, som kunna sättas i samband med elektronsprång vid de mjuka röntgennivåerna av substansen. För platina och kol ha sådana mätningar även utförts vid glödningstemperatur. Ett maximum erhålles därvid inom området för den andra gruppen, antydande en relativt hög sannolikhet för en energiförlust med motsvarande belopp — *Pt* 9 volt, *C* 7 volt.

AXEL LARSSON, *Experimentelle Untersuchungen über die Dispersion der Röntgenstrahlen*, Uppsala Universitets årsskrift 1929, 122 sid. Disp. i Uppsala 22 maj 1929. Opponenter: docent ERIK BÄCKLIN och fil. mag. I. WENNERLÖF.

Tidigare experimentella undersökningar av röntgenstrålarnas dispersion utförda under det sista decenniet av olika forskare ha beträffande den normala dispersionen visat, att storleksord-

ningen av brytningsindex kan beräknas medelst den DRUDE-LORENTZska dispersionsformeln. Däremot ha hittills utförda experimentalundersökningar ej klarlagt den anomala dispersionens karaktär.

Vid den nu utförda undersökningen av röntgenstrålarnas dispersion ha tre olika metoder använts.

Den första metoden grundar sig på studiet av den BRAGGska lagen för kristallreflexionen, $n\lambda = 2d \sin \varphi$, där n är spektrums ordning, λ våglängden, d gitterkonstanten och φ reflexionsvinkeln. Genom noggranna mätningar av reflexionsvinkeln dels för olika ordningar och dels för olika våglängder har det visat sig, att i den ursprungliga formeln skall införas en korrektionsterm, varigenom lagen för kristallreflexionen antar formen:

$$n\lambda = 2d \left[1 - \frac{4d^2}{n^2} \cdot \frac{\delta}{\lambda^2} \right] \sin \varphi .$$

Här är $\delta = 1 -$ brytningsindex. Genom mätningarna, som äro utförda med kristallerna kalkspat, gips och glimmer, har det ådagalagts, att avvikelsen från den ursprungliga BRAGGska lagen beror på en brytning av röntgenstrålarna i den »reflekterande» kristallytan, samt att brytningsindex beträffande den normala dispersionen kvantitativt kan beräknas enligt den LORENTZska dispersionsformeln. Den anomala dispersionen har icke visat sig åtkomlig med denna metod. För dess studium ha metoderna 2 och 3 använts.

Även vid den andra metoden kom kristallreflexionen till användning, men brytningseffekten mångdubblades därigenom att kristallen slipades så, att dess begränsningsyta bildade en mycket liten vinkel med den reflekterade strålningen. Härigenom stegrades mätnoggrannheten så mycket, att den anomala dispersionen blev åtkomlig. (Mätprincipen först använd av BERGEN-DAVIS.) Kristallmaterialet var kalkspat. Den häri ingående metallen kalciums K-absorptionskant är belägen vid 3,06 Å.E. Brytningsindex uppmättes för ett flertal våglängder inom våglängdsområdet 1,537—3,734 Å.E., vilket omsluter ovannämnda absorptionskant. Den erhållna dispersionskurvan företer i kantområdet en utpräglad avvikelse från det normala dispersionsförloppet (anomal dispersion).

Den tredje metoden var den s. k. prismametoden. Genom lämplig anordning av tvenne rätvinkliga kvartsprismor kunde brytningsindex med stor noggrannhet uppmätas inom våglängdsområdena 1,389—5,362 Å.E. och 7,111—9,868 Å.E., vilka områden ligga på var sin sida om kisels K-absorptionskant vid 6,72 Å.E.

Genom undersökningarna med metoderna 2 och 3 har den

anomala dispersionen vid en K-absorptionskant i huvudsak klarlagts. Vidare har med stöd av resultaten den korrektion erhållits, som eliminerar såväl den normala som den anomala dispersionens inverkan vid röntgenspektroskopiska våglängdsmätningar.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska Kemistsamfundet. Årg. XLI, 1929, häft. 5—8.

Ur innehållet i n:r 5. L. RAMBERG, Moderna analysvågar. — S. GIERTZ-HEDSTRÖM, Om hydrauliska moduler och resistensgränser hos cement. — Referat och översikter. — N:r 6. E. LARSSON, Inverkan av salter på ättiksyremolekylernas aktivitet i vattenlösning. — D. WERNER, Om fördelningskurvors deformation vid reaktioner i heterogena system. — Referat och översikter. — N:r 7. E. ENGEL, Om adsorption med aktivt kol. — R. NILSSON, Studien über die enzymatische Phosphorylierung und Dismutation. — Referat och översikter. — N:r 8. E. HÄGGLUND und F. W. KLINGSTEDT, Ueber das Absorptionsspektrum der Ligninderivate im Ultraviolett. — A. ÅSTRÖM, Om aerosoler och deras adsorption med fasta adsorbenter. — H. VON EULER, G. RENGMAN und E. BRUNIUS, Ueber Reaktionen zwischen Zuckerarten und Aminen V. — I alla numren: Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Populär astronomisk tidskrift. Utgiven av Svenska Astronomiska Sällskapet. Årg. X, 1929, dubbelhäfte 1 och 2.

Ur innehållet. C. V. L. CHARLIER, Huru uppkom Newtons principia? — P. DAHLGREN, Den nautiska astronomien under antiken. — KNUT LUNDMARK, Stjärnsystemets byggnad och övriga egenskaper. — YNGVE ÖHMAN, Spektralanalysen i astronomiens tjänst. — Därjämte flera intressanta notiser.

Vetenskapen och livet. Årg. XIV, 1929, häft. 6, 7 och 8. Hugo Geber.

Ur innehållet i n:r 6. Bergoljans uppkomst. — Vad veta vi om de övre luftlagren? — Atomer och elektroner. — EINSTEINs fältteori. N:r 7. Fysikens utveckling i England de senaste tio åren. — De lätta legeringarna i den moderna metallurgien. — Gasernas natur. — N:r 8. Den kosmiska strålningen. — Röntgenstrålarnas användning i den moderna industrien. — Bensinvagnens uppkomst. — Luminiscens. — Vätskornas natur. — HUYGENS, Ett trehundraårsminne.

Era. Elektriciteten rationella användning. Årg. 1929. häft. 5, 6, 7 och 8.

Ur innehållet i n:r 5. Den elektriska belysningsarmaturens ljustekniska uppgifter. — Energiförbrukning vid kokning. N:r 6. Den elektriska energien i det moderna samhället (prof. VELANDERS installationsföreläsning). — Tekniska nyheter. N:r 7. Finska statens vattenkraftindustri. — Elektriska inslag på sömmarens utställningar. N:r 8. Kraftledningar i samhällen. — Hemmets arbetsbelysning. — Elektrifierade mönstergårdar.

Industritidningen Norden. Årg. 1929, häft. 20—36.

Ur innehållet. Signalbestämning av fartygs läge. — Television. — Manganmetallens användning. — Betong som vägbeläggning. — Imatra kraftverk. — Arbetsstudier (Tidsstudier). — Om flygmaskinmotorer och deras lager. — Krupps rostfria stål. — Fyrtio år som ingenjör i U. S. A. — Berlins hamnanläggningar. — Pappersmassa enl. MASONs metod. — Den galvaniska förkromningen. — I alla nummer beskrivningar av nya patent och uppfinningar.

Radioamatören. Årg. VI, häft. 6—9. Göteborgs litografiska aktb.

Ur innehållet. Tonfilm. — Avskärmade ramantenner. — Praktisk mätteknik. — Hörtelefonernas renässans. — Amatörsändarens strålningsstyrka i olika riktningar. — Lokalmottagare och grammofonförstärkare. — Nya apparater och kopplingar.

Radio. Årg. VII. 1929, häft. 7—13. Tidskriften utkommer med 24 nummer per år; per helår kr. 8: —.

Ur innehållet. Skärmgallerröret som motståndsförstärkare. — Om radiostörningar. — Galler- och anodlikriktning. — Dimensionering av radiomottagare. — Antennanläggningens effektivitet. — Färgtelevision. — Rörvoltmeter med dubbelgallerrör. — Kommersiella nyheter. — Våglängdstabell.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Organ för Norsk Matematisk Forening. Årg. 11, 2 Hefte.

Ur innehållet. S. SKOLEM, Et par specielle rekker. — HELGE BERGH KRAGEMO, Tre brev fra Niels Henrik Abel. — FR. LANE-NIELSEN, Oplysninger om Abels forhold i 1827 og 1828. — Bokanmeldelser. — Eksamensopgaver. — Opgaver til løsning.

Matematisk Tidsskrift. Udgivet af Matematisk Forening i København. Aarg. 1929, 2 Hefte.

Ur innehållet i den elementära avd. *A.* J. HJELMSLEV, Matematiken og dens Betydning. — E. C. VALENTINER, Et Bevis for

Caseys Sætning. — Literaturanmeldelser. — Danske Eksamensopgaver. Ur den vetenskapliga avd. *B.* G. RASCH, Studier over Kummers Konvergenskriterium. — B. JESSEN, Om konvekse Kurvers Krumning. — J. FAVARD, Sur le déficit isopérimétrique maximum dans une couronne circulaire.

Fysisk Tidsskrift. Udgivet af Selskabet for Naturlærens Udbredelse. Aarg. 27, 1929, dubbelhäft. 1—2 och 3.

Ur innehållet i 1—2. H. M. HANSEN, Peter Kristian Prytz. — SVEN WERNER, Davissons og Germers Forsøg over Spredning af Elektroner. — HELGE PETERSEN, Vort Kendskap til Atmosfærens højeste Lag. — Danske Eksamensopgaver. Ur n:r 3. J. A. CHRISTIANSEN, Svante Arrhenius. — C. WINTHER, Forskellige Lyskilders spektale Egenskaber. — P. B. FREUCHEN, Tørrede vædskers egenskaber. — P. J. PEDERSEN, To Elevforsøg: Det elektriske Kogekar, Elektriske Niveaulinjer. — Anmeldelser.

Kataloger m. m.

Elektriska aktb. Siemens. Av firmans Z-instrument (se denna tidskrifts septembernummer 1928) levereras nu ett par särskilt ström- resp. spänningskänsliga typer (vridspolesystem), nämligen en ampèremeter med mätområdena 0,3; 1; 3 och 10 mA (spänningsfall vid ändutslag resp. 0,58—0,1 V) och en voltmeter med mätområdena 30; 100; 300 och 1000 mV (motstånd per volt c:a 2000 ohm). Priserna äro resp. kr. 101: — och 95: —.

Sedan någon tid tillverkar firman en torrlikriktare *Protos.* Denna grundar sig på ventilverkan hos kontaktytan mellan koppar och kopparoxidul. Plattor belagda med oxidul äro anbragta i press mot kopparplattor. Fyra dylika likriktarelement äro kopplade i den kända GRAETZska brygganordningen så att växelströmmens bägge olikriktade halvvågor bli utnyttjade. »Bryggan» mottager ström från nätet genom en transformator, som sätter ned spänningen till för aggregatet lämplig storlek; transformatorn är försedd med tre steg, som ge likriktad ström för laddning av 1, 2 och 3 ackumulatorer à 2 V. Laddningsströmmen är 0,5 amp. och verkningsgraden 50 %. En broschyr med detaljerad beskrivning erhålles från firman.

Westons instrument. (ZANDER O. INGESTRÖM, Fredsgatan 4, Stockholm). I septemberhäftet 1928 refererades rätt utförligt en del av denna firmas elektriska mätinstrument. En del nyheter ha under året tillkommit, bland vilka må omnämnas

en synnerligen behändig mättransformator (vikt 1,2 kg; dimensioner 145 × 109 × 48 mm), som kombinerad med en växelströmsampèremeter för maximalt 1 amp. möjliggör mätning av strömmar inom området 0,2—200 amp. Ampèremetern är därvid inkopplad i den för 1 amp. beräknade sekundärledningen. Strömmen, som skall mätas, passerar primärledningen, som är utförd för resp. 2, 5, 10, 20, 50, 100 och 200 amp.

Ett cirkulär »Weston Radio Instruments» upptar för radiomätningar lämpliga instrument; illustrationer visa instrumentens inkoppling vid olika mätanordningar.

Edv. Nerliens Aktb. (Kungsg. 19, Stockholm) har insänt katalog över PATHÉS motokamera och hembiograf för smalfilm (9,5 mm). Den lilla kameran (1,5 kg) arbetar automatiskt utan vare sig vev eller stativ, tar 8,5 m film i en laddning och kräver ingen avståndsinställning (fokaldistans 2 cm), varför den är ytterst lättskött. Vid avstånd mindre än 2,5 m användas särskilda, billiga porträttlinser. Filmen framkallas positivt och behöver således ej kopieras. Hembiografapparaten är även liten och lätt (2,5 kg) och ofarlig, emedan filmen är brandfri, drives med vev eller motor men kan stannas ett ögonblick vid önskat ställe. Filmbilden förstoras lämpligen 176 ggr, från 8,5 mm till 1,5 m, d. v. s. mindre än då normalfilm förstoras från 24 mm till 4,5 m. Priserna för såväl apparater som film och framkallning måste anses låga; kamera och projektionsapparat kunna erhållas för 300 kr. tillsammans, och en filmrulle om 8,5 m kostar — framkallning inberäknad — c:a 5 kr.

Smalfilmen har tydligen möjligheter, som man även för undervisningsändamål bör uppmärksamma och söka utnyttja. Rätt mycket inspelad dylik film finnes att tillgå.

Optiska instrument Aktb. (Kungsgatan 29, Stockholm). Med detta häfte följer ett prospekt från firman med upplysningar om ZEISS IKONs nya apparater för smalfilm (16 mm). Vi hänvisa till detta prospekt, som i korta drag beskriver den lilla eleganta filmkameran och den motordrivna projektorn.

Philips. Bland firmans radionyheter märkas en ny, synnerligen effektiv *elektromagnetisk högtalare*, en *kortvågsmottagare*, som kan taga in våglängder inom området 10—2 400 m och ett *amatörsändarrör* (T. C. 03/5). Tack vare att uttagningarna från såväl galler som anod äro anbringade upptill å röret, blir kapaciteten mycket liten, varför röret kan användas vid generering av ultrakorta vågor (ned under 1 m). Glödspänningen är 4 volt

och glödströmmen 0,275 amp. Anodspänningen är blott 300 volt, varvid 5 watt erhålles; effekten är god även vid 220 volt (nätspänning). Ett lätthanterligt och billigt rör (kr. 18:50), som bör uppmärksammas av den som vill göra försök med ultrakorta vågor. Det torde observeras, att korta vågor äro synnerligen lämpliga för demonstrationsändamål.

Den intresserade kan från firman erhålla en broschyr, »Wie baue ich einen guten und billigen Amateursender?»

Rationell belysning. Under denna rubrik omtalades i senaste marsnumret bl. a. en belysningsteknisk nyhet, den s. k. *P-H-lampan*, en bländfri armatur med fördelaktig ljusfördelning och god ekonomi. En annan dansk armaturtyp, *Lyfa*, till det yttre påminnande om *P-H-lampan* och med till synes lika goda egenskaper men något billigare än denna, föres nu i marknaden av ASEA och av ELEKTRISKA AKTB. SKANDIA, Stockholm. De båda typerna differera i en del konstruktionsdetaljer men arbeta efter i stort sett samma principer. De nämnda firmorna tillhandagå med upplysande broschyrer.

Aktb. Skandia har dessutom insänt kataloger över sin *Midgårdsbelysning*, bestående av bländfria djupreflektorer med diffus reflektion, monterade på stabila, ställbara vägg- och bordsarmar. De utmärkas genom stora inställningsmöjligheter i alla riktningar och äro mycket lämpliga för arbets- och laborationsbord och för belysning av lektionsbord och svarta tavlan.

I kataloger från *Ingenjörsfirman G. Schönander*, Stockholm, beskrives ZEISS IKONS spegelljusarmatur för såväl direkt som indirekt belysning, där den goda ljusekonomien och ljusfördelningen åstadkommes genom rationellt formade glassilverspeglar. Illustrationer visa armaturens användning vid skolbelysning. I *Spiegel-Licht-Blätter* (aug. 1929) redogöres för glaskropparnas tillverkning och för några av armaturens användningsmöjligheter.

Avhandlingar och uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1928—29.

EINAR NORDEFELDT, *De kemiska laborationerna i skolan.* H. reallärov. å Norrmalm.

OLOF NORRMAN, *Några drag ur Västeråstraktens geologiska byggnad och kulturgeografi.* Västerås h. allm. läroverk.

GUSTAV ERIKSSON, *Sur le domaine de variation des inconnues d'un système d'équations linéaires à coefficients hermitiens.* Skövde h. allm. läroverk.

HUGO GRIMLUND, *Några anteckningar angående Cederbaumska mineralsamlingen i Oskarshamns läroverk.* Oskarshamns samrealskola. (Historik rörande C. mineralsaml. tillkomst.)

J. A. G. SVENSON, *Ueber die Primitivität und die Imprimitivität algebraischer Gleichungen.* Malmö tekniska lärov.

Föreläsningar för lärarkandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1928–29.

Höstterminen 1928.

Göteborg: Om infinitesimala tankegångar inom skolmatematiken (4 t.), lektor A. WAHLUND.

Lund: Den nya kursplanen i kemi (2 t.), adjunkt K. PARCK.

Stockholm: Matematikundervisningen i klass 6 (2 t.), adjunkt B. WAHLSTRÖM. Elektronrören och deras egenskaper (2 t.), adjunkt T. WETTERBLAD. Om kemilaborationer i skolan (2 t.), lektor E. NORDEFELDT.

Vårterminen 1929.

Lund: Funktionsläran å gymnasiet (1 t.), Geometriundervisningen i realskolan (1 t.), lektor B. SVENSSON.

Stockholm: Teckningens betydelse för geometriundervisningen (2 t.), adjunkt O. ENEROTH. Demonstrationsförsök rörande enstaka atomers verkan (2 t.), lektor EVA RAMSTEDT. Metodiska problem ur elektricitetsläran, med experiment (2 t.), adjunkt T. WETTERBLAD. Några elektrokemiska demonstrations- och laborationsförsök (2 t.) samt Den nyare elektrolytiska dissociationsteorien (2 t.), lektor G. STARCK.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

337) Visa, att $(n-1)\sin nx = 2\sum_{p=1}^{p=n-1} \sin px \cdot \cos(n-p)x$.

C. A. Mebius.

338) På hur många olika sätt kunna två fientliga drottningar uppställas på ett schackbräde utan att stå i slag för varandra?

Iter.

339) Att i en given cirkelsektor inskriva en rektangel, som vid rotation kring sektorns symmetrilinje alstrar en cylinder med största möjliga totala yta. *X.*

340) F är brännpunkten till en parabel, S axelns skärningspunkt med styrlinjen. Sök excentriciteten för den ellips med foci i F och S, som skär parabeln under så liten (spetsig) vinkel som möjligt. *X.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.[2]

341) Ekvationen

$$\frac{2x-1}{16-2x^3} - \frac{3}{x^2+2x+4} = \frac{a}{x-2}$$ har en rot $x_1 = -1$.

Bestäm a och den andra roten.

Svar: $a = 3{,}5$; $x_2 = -2\frac{1}{7}$.

342) Lös ekvationen

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x.$$

Svar: $45° + n \cdot 180°$; $180° + n \cdot 360°$.

343) Diskutera kurvan

$$y = \frac{\sin^2 x}{\sin x - \frac{1}{4}}.$$

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Det är red:s avsikt att utvidga denna avdelning omfattande enklare uppgifter. För närvarande kan det ej ske på grund av otillräckligt förråd. Red. riktar en vördsam anhållan till tidskriftens läsare att insända dylika uppgifter. Varje lärare har säkert i sitt förråd instruktiva exempel, som kollegerna skulle sätta stort värde på. Uppgifterna behöva ej nödvändigt vara originella, varianter av kända typer äro även välkomna. *Red.*

344) I likheten

$$x - y + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 + 3\sqrt{2}$$

äro x och y rationella tal. Bestäm deras värden.

Svar: $\begin{array}{c|c|c} x & 8 & 18 \\ \hline y & 2 & 16 \end{array}$.

345) En rät linje skär två mot varandra vinkelräta plan A och B i punkterna P och Q resp. Avstånden från P och Q till planens skärningslinje förhålla sig som $\sqrt{6} : 2$. Linjens projektioner på A och B förhålla sig som $\sqrt{2} : 1$. Beräkna de vinklar, som linjen bildar med planen. Svar: 45° och 60°.

346) Att upprita en rätvinklig triangel, då man känner inskrivna cirkelns radie och avståndet mellan de in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter.

Lösningar till uppg. 317—320.

317) *Visa, att*

$$149 - 48\sqrt{6} - 36\sqrt{3} + 24\sqrt{2}$$

är en jämn kvadrat.

Antages roten vara av enklaste möjliga form

$$\pm (a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3})$$

där a, b, c äro rationella, fås efter kvadrering!

$$149 - 48\sqrt{6} - 36\sqrt{3} + 24\sqrt{2} = a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 2bc\sqrt{6} + 2ac\sqrt{3} + 2ab\sqrt{2}.$$

Härur fås villkoren:

$$bc = -24;\ ac = -18;\ ab = 12;\ a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 149.$$

De tre första av dessa ge efter hopmultiplicering och rotutdragning $abc = \pm 72$; alltså $a = \mp 3$; $b = \mp 4$; $c = \pm 6$, vilka värden även uppfylla det sista villkoret.

Uttrycket är alltså kvadraten på $\pm (3 + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{3})$.

B—r.

Även löst av *E. R.*, *N. Löfgren*, *A. H. P.*, *Åke Pleijel* och *A. N. Zahl.*

318) *En cirkel genom brännpunkterna F_1 och F_2 till en hyperbel skär kurvan i P och konjugataxeln i Q. P och Q ligga på samma sida om den reella axeln. Från P dragas linjerna PR_1 och PR_2 parallella med QF_1 och QF_2. R_1 och R_2 ligga på reella axeln. Visa, att R_1R_2 har konstant längd, hur cirkeln än väljes.* *X.*

Om cirkeln råkar y-axeln i punkten R, diametralt motsatt Q, inses att PR är tangent och PQ normal till hyperbeln i $P(x_1; y_1)$.

Enär normalens avskärning med y-axeln är $\frac{c^2 y_1}{b^2}$, fås omedelbart ur likformiga trianglar

$$\frac{c^2 y_1}{b^2 \cdot y_1} = \frac{2c}{R_1 R_2},$$

varav

$$R_1 R_2 = \frac{2b^2}{c}.$$

Löst av *B—r, E. R., N. Löfgren, A. H. P.* och *Åke Pleijel.*

319) *Att upprita en triangel, då man känner summan av två sidor samt höjden och medianen från den gemensamma vinkelspetsen.* *Iter.*

Höjden är h, medianen $m\,(> h)$ och sidornas summa $2a\,(a > m)$.

Genom en punkt P drages en rät linje l. En cirkel kring P med radien m skär i fyra punkter Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 de linjer, som gå parallellt med l och på avståndet h från denna. Den sökta triangeln har då tydligen ett hörn i en vilken som helst av punkterna Q och sina övriga hörn i brännpunkterna till en genom punkterna Q gående ellips med storaxeln $2a$ belägen utefter l. Man finner då följande konstruktion:

Upprita med P som centrum en cirkel med radien a. Drag genom Q vinkelrätt mot l en linje, som skär cirkeln i S och l i R. Drag i P mot l en normal PT sådan, att $PT : a = RQ : RS$. En cirkel kring T med radien a skär l i M och N. Triangeln MQN är då den sökta. De fyra punkterna Q ge tydligen inbördes kongruenta lösningar. *B—r.*

Även löst av *E. R., A. H. P.* och *Åke Pleijel.*

320) *Att upprita en triangel, då man känner läget av två höjders fotpunkter samt vet, att den sidan, mot vilken den tredje höjden svarar, ligger utefter en given obegränsad rät linje.* *C. A. Mebius.*

De givna punkterna äro A och B, den givna linjen l. Den utefter l belägna triangelsidan skall då synas under rät vinkel från både A och B. Man drar därför mittnormalen till AB; den skär l i C. Med C som centrum ritas en cirkel genom A (och B); den skär l i P och Q. Linjerna PA och QB råkas i R_1, linjerna PB och QA i R_2; trianglarna PQR_1 och PQR_2 uppfylla då tydligen de önskade villkoren.

(Jfr f. ö. stud.-uppg. 7 v. t. 1924 R.) *B—r.*

Även löst av *E. R., N. Löfgren, A. H. P., Åke Pleijel* och *A. N. Zahl.*

Fysikaliska uppgifter.

Såsom fortsättning på den i föregående årg., h. 1 och 3, påbörjade serien problem författade av lektor RAGNAR LUNDBLAD, följa här en del optiska uppgifter: prismer (44—47), speglar och linser (48—56), refraktion i allmänhet (57—62), de optiska instrumenten (63—68).

44. Ett glasprismas tvärgenomskärning har formen av en rätvinklig triangel, ABC, där vinkeln B är rät och vinkeln A är 10°. Mot den kortare kateten, BC, som är 2 cm lång, infaller nära invid B en ljusstråle under infallsvinkeln 30°. Denna stråle brytes första gången ut ur prismat i punkten F. Bestäm avståndet AF. Brytningsindex för glas är 1,5.

45. Ett glasprisma, vars tvärsnitt har formen av en likbent och rätvinklig triangel, anordnas med ena kateten vertikal på bottnen av ett glaskärl, och man påfyller kolsvavla, så att den vertikala kateten till hälften kommer under vätskeytan. Mot den vertikala ytan infalla vinkelrätt två strålar, den ena i luften, den andra i vätskan. Vilken vinkel bilda dessa strålar med varandra efter utträdet ur prismat? Glasets brytningsexponent är $^3/_2$, kolsvavlans $^5/_3$.

46. Huvudsnittet av ett glasprisma har formen av en likbent och rätvinklig triangel, vars bas (hypotenusan) är 6 cm lång. Mot ena kateten infaller mycket nära basen en med basen parallell ljusstråle. Den brytes, totalreflekteras mot basen och brytes åter vid den andra kateten. Bevisa, att denna utgående stråle är parallell med basen och beräkna dess avstånd från basen. Brytningsexponenten för glas är $^3/_2$.

47. I ett kärl är en plan spegel så anbragt, att den bildar en vinkel av 30° med kärlets horisontella botten. Kärlet innehåller en vätska, som delvis täcker spegeln. Ett parallellt strålknippe infaller på sådant sätt, att en del av detsamma träffar den ovan vätskeytan belägna delen av spegeln under rät vinkel. Den nedre delen av knippet, som reflekteras mot spegelns under vätskeytan belägna del, träffar efter reflexionen vätskeytan under sådan vinkel, att totalreflexion nätt och jämnt inträder. Sök vätskans brytningsindex.

48. I en bikonvex lins ($n = ^3/_2$) är radien hos båda ytorna 5 cm. Angiv, hur det infallande strålknippet skall vara beskaffat, för att man med denna lins skall erhålla reella bilder, om den är nedsänkt i a) vatten ($n = ^4/_3$); b) kolsvavla ($n = ^5/_3$)?

49. För att bestämma reflexionsförmågan hos en plan metallspegel anbragte man densamma på ett vridbart bord, i vertikal ställning och i sådant läge, att förlängningen av bordets vrid-

ningsaxel föll i spegelns plan. Mitt framför spegeln placerades på det vridbara bordet en glödlampa med en enda, rak, vertikal glödtråd. På lämpligt avstånd från bordet uppställdes därefter en fotometer, och bordet vreds så, att glödlampan och dess spegelbild samtidigt belyste fotometerns ena yta och sedda från fotometern avtecknade sig tätt intill varandra. På andra sidan av fotometern var en konstant ljuskälla uppställd, och när båda fotometerytorna voro lika belysta, befanns denna ljuskällas avstånd från fotometern vara 31,9 cm. Spegeln borttogs därefter, utan att bordets ställning ändrades, och ljuskällan på andra sidan fotometern inställdes ånyo. Dess avstånd från fotometern blev då 38,8 cm. Därpå vreds bordet 180°. Vid förnyad inställning erhölls avståndet 47,1 cm för samma ljuskälla. Hur många procent av den mot spegeln infallande strålningen reflekteras av densamma?

50. På 12,5 cm avstånd framför en konkav spegel befinner sig ett litet, lysande föremål. Dess bild uppfångas på en skärm, och man vrider spegeln så mycket, att bilden förflyttas 4 mm i sidled. Ljuskällan skjutes nu 37,5 cm rätt utåt från spegelns mittpunkt, och skärmen förflyttas, så att en tydlig bild ånyo erhålles (lämpligen nära invid skärmens kant). Därefter vrides spegeln tillbaka till sitt ursprungliga läge; bilden förskjutes då 1 mm i sidled. Beräkna av dessa uppgifter spegelns fokaldistans.

51. Ett rakt rör tillslutes i båda ändar medelst två likadana, tunna, plankonvexa linser, vilka anbringas med den plana ytan utåtvänd och vinkelrät mot rörets axel. Genom ett sidorör fylles röret helt och hållet med en viss vätska. Därefter får ett parallellt, centralt strålknippe utifrån det röret omgivande mediet infalla mot den ena linsen. Hur långt skall röret vara, för att strålknippet, när det utträder ur röret, åter skall bliva parallellt? Den buktiga linsytans radie är r cm, brytningsexponenten från luft till glas är n_1 och från luft till vätskan n_2.

52. Två samlingslinser äro så anbragta, att deras huvudaxlar sammanfalla. Den första har brännvidden 10 cm, den andra 20 cm. Avståndet dem emellan är 12 cm. På huvudaxeln, 15 cm framför den första linsen, befinner sig ett litet föremål, och man iakttager dess bild bakom linssystemet. Hur mycket förflyttas bilden, om man låter linserna byta plats?

53. En tunnväggig sfärisk glasballong med radien 5 cm omsluter en anordning med en liten metallkula, vilken på elektrisk väg kan bringas att utstråla ett intensivt ljus (»punktljuslampa»). Lampan nedsänkes i ett kubiskt litermått, vars väggar bestå av tunna jämntjocka glasskivor. En plankonvex lins tryckes med sin plana yta mot en av väggarna, mittför det ställe, där denna

tangeras av lampans ballong. Den bild av kulan, som alstras, när lampan tändes, uppfångas på en skärm. När man vrider på lampan, förskjutes bilden, tydligen emedan den lysande kulan ej sitter mitt i ballongen, och man finner, att bilden oscillerar mellan två punkter på 5,3 resp. 5,8 cm avstånd från linsen. Hur stort blir oscillationsområdet, om litermåttet fylles med vatten? Vattens brytningsindex är $^4/_3$. Såväl glasballongens som litermåttets väggar få antagas vara jämntjocka.

54. Planeten Mars kan anses som en sfär med diametern 6780 km, solen som en sfär med diametern 1 390 900 km. Vi betrakta ett tillfälle, då Mars står i opposition, d. v. s. då jorden står mellan Mars och solen. Om det på Mars anordnades en fullkomligt stilla, speglande vätskeyta, skulle det uppstå en spegelbild av solen. Under vilken synvinkel skulle denna synas från jorden? Marsbanans radie är 228 millioner km, jordbanans 149 millioner km.

55. Framför en plankonvex lins uppställes på 32 cm avstånd ett lysande föremål, och man erhåller därvid en skarp bild på en skärm 24 cm från linsen. Den konvexa linsytan försilvras därpå, och linsen anbringas på samma ställe som förut och på sådant sätt, att det infallande ljuset först träffar den plana linsytan. En verklig bild uppstår då 2,4 cm från linsen. Beräkna den konvexa ytans radie och glasets brytningsexponent.

56. När en punktformig ljuskälla befinner sig på huvudaxeln av en viss lins, 16 cm framför densamma, alstras på en mot huvudaxeln vinkelrät skärm en ljusfläck med 4 cm radie. Skjuter man ljuskällan 4 cm närmare linsen, blir ljusfläckens radie $^5/_3$ cm. Hur många gånger starkare är skärmens belysning i senare fallet? Ljusförlusterna i linsen kunna antagas vara procentiskt lika i båda fallen och intensiteten jämnt fördelad över de belysta ytorna. Linsens öppning kan anses vara liten.

57. En spegelglasskiva, som är 8 mm tjock, är försilvrad på båda sidor, men på framsidan äro smala, raka, sinsemellan parallella springor i försilvringen anordnade med mellanrum av 4 mm. Ett parallellt strålknippe infaller mot framsidan på sådant sätt, att infallsplanet är vinkelrätt mot springorna. Hur stor bör infallsvinkeln vara för att de strålar, som komma in genom en av springorna, skola hitta ut genom någon av de följande springorna efter en enda reflexion mot den bakre beläggningen? Glasets brytningsindex är $^3/_2$. Man kan bortse från böjningsfenomen vid springorna.

58. En sfär av glas med radien 5 cm och brytningsindex $^3/_2$ är sotad så när som på en smal sfärisk zon omkring en

parallellcirkel, vars radie är 3 cm. Utanför sfären, 6 cm från densamma och mitt framför den mindre kalotten, är en punktuell ljuskälla anbragt. Den av de brutna strålarna belysta delen av sfärens bakre yta bildar en sfärisk zon, vilken kan anses vara mycket smal, runt kring en parallellcirkel. Hur stor är radien i denna?

59. Om parabeln $y = x^2$ får rotera kring y-axeln, uppstår en yta, kallad rotationsparaboloid. I en tjock, planparallell glasskiva slipades en urborrning i form av en dylik paraboloid med axeln vinkelrät mot skivans plan. Ett parallellt strålknippe fick därefter infalla vinkelrätt mot skivans orörda plana yta. De strålar, som ligga i närheten av axeln, brytas under sådana förhållanden i den paraboloidiska ytan; de som infalla på större avstånd totalreflekteras. Sök det minsta avstånd från axeln en infallande stråle måste ha, om den skall totalreflekteras. Glasets brytningsindex är 1,58.

60. I ett kärl anbringas, ett stycke ovanför bottnen, en tunn, konvex glaslins ($n = \frac{3}{2}$) med huvudaxeln vertikal, och kärlet fylles med en vätska, vars brytningsindex är $^5/_3$, tills vätskan nätt och jämnt täcker linsen. Är det möjligt, att placera en ljuskälla på huvudaxeln ovanför vätskeytan på sådant sätt, att strålarna efter utträdet ur linsen fortfarande divergera, såsom om de komme direkt från ljuskällan? Linsens fokaldistans i luft är 12 cm.

61. Bottnen av en glasbägare är sotad, och en millimetergradering är inristad i sotlagret, så att graderingen väl synes, om man belyser bägaren underifrån. Bägaren innehåller anilin, en vätska, vars brytningsindex är 1,6. En bikonvex lins, vars fokaldistans är 8 cm, anbringas i vätskeytan, så att den ena ytan kommer i luften och den andra, vars radie är 48 cm, kommer under vätskeytan. Därigenom erhålles på en vågrät skärm en bild av graderingen. Hur djupt bör anilinskiktet vara, för att bildens höjd över bottnen skall förhålla sig till linsens höjd över bottnen som 7 : 2.

62. En cylindrisk stång av glas, som är planslipad vinkelrätt mot axeln i ena ändan och konvex i den andra, är anbragt med axeln vertikal ovanför ett väl belyst föremål och på en höjd, som är så avpassad, att man erhåller en skarp bild av föremålet på den plana ytan. Föremålets yta är 0,3 cm^2, stångens längd 45 cm, den konvexa ytans radie 5 cm och glasets brytningsexponent 1,5. Hur stor blir bildens yta?

63. En astronomisk tub, vars objektiv har brännvidden 1,2 m och okular brännvidden 40 mm, inställes på en stjärna, varvid observatörens öga är ackommoderat för seende på oändligt stort

avstånd. Utan att rubba kikarens inställning använder man den sedan för att iakttaga föremål på jordytan. Beräkna avståndet till det närmaste föremål, som man sålunda kan skarpt iakttaga, om ögats närpunkt ligger på avståndet 12 cm.

64. En tub består av ett objektiv med fokaldistansen 2,12 m och en konkav okularlins, båda akromatiska. Tuben riktas mot solen, och den konkava linsen förskjutes så, att man erhåller en solbild med diametern 1,73 dm på en skärm 72 cm bakom den konkava linsen. Beräkna därav den negativa linsens brännvidd. Soldiametern upptager för blotta ögat en synvinkel av 32′.

65. En teaterkikare består av en samlingslins med brännvidden 30 cm och en spridningslins med brännvidden 8 cm. På optiska huvudaxeln, 2,4 m framför objektivet, befinner sig ett föremål. Okularet utdrages så långt, att man slutligen erhåller en reell bild av samma storlek som föremålet. Var faller denna bild?

66. Framför objektivet på en astronomisk tub anbringas ett prisma, som täcker hela objektivet. Ljuset från en stjärna uppdelas i prismat i sina elementarfärger; de röda och de violetta strålarna bilda därför vid inträdet i kikaren en viss vinkel med varandra. Till följd av denna färgspridning erhålles i objektivets fokalplan, i stället för en enda bild av stjärnan, ett spektrum, sammansatt av de oändligt många bilderna av stjärnan i spektrets alla färger. Man injusterar tuben så, att en viss röd ljussort (*C*-linjen) och en viss indigofärgad ljussort (*G*-linjen) ligga på var sin sida om huvudaxeln och lika långt från densamma. Huru långt är spektret mellan dessa linjer? Objektivet är akromatiskt, och dess fokaldistans är 9,58 m; vinkeln mellan de röda *C*-strålarna och de indigofärgade *G*-strålarna är vid utträdet ur prismat 49′.

67. En avläsningskikare, vars objektiv har brännvidden 30 cm, är uppställd framför en plan spegel (t. ex. spegeln på en spegelgalvanometer). I objektivets fokalplan är anbragt en skala med gradering i tiondels millimeter. Ett delstreck, som ligger nära mitten av synfältet, är förlängt nedåt, och dess nedre del belyses starkt genom en särskild anordning. Kikaren vrides, tills man får in i synfältet en bild av det belysta skalstrecket, vilken alstrats genom ljusstrålar, som från skalstrecket gått genom kikarens objektiv, reflekterats mot den plana spegeln och sedan åter passerat in genom objektivet. När injusteringen är färdig, sammanfaller bilden med det belysta delstrecket. Hur mycket måste den plana spegeln vridas, för att bilden skall förskjutas 10 delstreck åt sidan ur detta läge?

68. Man vill fotografera ett spektrum och borttager därför okularet från spektroskopets kikare samt uppfångar i ställe

spektret på en fotografisk plåt. Anordnar man därvid plåten vinkelrätt mot kikarens huvudaxel och så, att t. ex. den gula delen av spektrum avbildas skarpt, så bliva särskilt de ultravioletta linjerna suddiga, vilket förklaras därav, att kikarens lins icke är akromatiserad för ultraviolett ljus. Nu vet man, att linsen har brännvidden 35,6 cm för strålar med våglängden 0,000589 mm (*D*-linjen) och 34,1 cm för våglängden 0,000340 mm (kadmiumlinje i det ultravioletta spektralområdet). Man vet ock, att den förra strålsorten, innan den träffar kikarens objektiv, bildar vinkeln 2°53′ med kikarens optiska huvudaxel och den senare vinkeln 3°18′, åt var sitt håll från huvudaxeln räknat. Vilken vinkel bör den fotografiska plåten bilda med huvudaxeln, om båda strålsorterna skola skarpt avbildas på densamma?

Resultat: **44.** 4,974 cm. **45.** 95°,48. **46.** 1,397 cm. **47.** 1,528. **48.** a) Om det infallande strålknippet är konvergent eller parallellt eller om det divergerar från en punkt på minst 20 cm avstånd från linsen. b) Om det infallande knippet konvergerar mot en punkt på upp till 25 cm avstånd från linsen. **49.** 70,63%. **50.** 10 cm. **51.** $\frac{2n_2r}{n_1 - n_2}$ cm. **52.** Bildens avstånd från linserna ökas med 2,14 cm. **53.** Bilden oscillerar mellan två punkter på avståndet 8,196 resp. 9,456 cm från linsen. **54.** 0°,0000075(44) = 0″,027(16). **55.** $r = 6{,}62$ cm; $n = 1{,}483$. **56.** 10,24 gånger. **57.** 21°,34 eller 42°,11 eller 64°,16. **58.** 2,774 cm. **59.** 0,4087 längdenheter. **60.** Ja, 24 cm ovan vätskeytan. **61.** 17,78 cm. **62.** 1,2 cm^2. **63.** 145,2 m. **64.** 9,26 cm. **65.** 48 cm bakom okularet. **66.** 13,65 cm. **67.** 0°,0955. **68.** 68°,(1).

Jac. Berzelius.

Jac. Berzelius.

$^{20}/_{8}$ 1779—$^{7}/_{8}$ 1848.

Svenska Vetenskapsakademien har högtidlighållit 150-årsminnet av sin nydanares och ryktbaraste ledamots, Jac. Berzelii födelse, genom en glänsande och värdig minnesfest sistlidne 16 okt. i Riddarhuset och genom utgivandet av hans levnadsteckning. Författandet härav har uppdragits åt Akademiens nuvarande sekreterare, professor H. G. Söderbaum, och aldrig har väl ett motsvarande uppdrag lämnats i skickligare händer. Genom utgivandet av Berzelii självbiografiska

anteckningar, resejournaler och brevväxlingar, allt med kommentarer, har prof. Söderbaum sedan många år skaffat sig en förtrogenhet med Berzelii liv och forskargärning, som väl må betecknas som enastående. Samtid och eftervärld skola med all rätt betyga honom sin tacksamhet för det monument han rest vår store landsman i och med denna levnadsteckning, som redan nu utgör två volymer om sammanlagt mer än 1000 sidor. Den är visserligen oavslutad, i det den omfattar de första — och intressantaste — 50 åren av Berzelii liv; man hoppas livligt, att en tredje del skall fullborda detta redan i sitt nuvarande skick monumentala standardverk.

Ett sammanträngt referat skulle icke kunna giva någon föreställning om biografiens överrika innehåll. Den ger, kan man lugnt säga, allt om Berzelius, hans släktförhållanden, hans stundom glada, stundom bittra uppväxt- och studieår, hans kamp för en plats, där hans forskarlidelse kunde tillfredsställas, hans forskar-, lärar- och ämbetsgärning, kontakt med människor, inställning till samtida vetenskap och allmänna kulturströmningar, hans fängslande personlighet. Här må det vara nog att framhålla en kvantitativt sett obetydlig och just då resultatlös del av det jättearbete, som Berzelius under ett 70-årigt liv medhann, nämligen hans insats i den elementära undervisningens reformerande. Han var, som bekant, medlem av 1825 års stora undervisningskommission, där han, visserligen icke ensam, men mot en övermäktig majoritet kämpade för en större plats i den allmänna bildningen åt naturvetenskaperna, på bekostnad, om så behövdes, av den klassiska bildningen. I sin självbiografi skriver han härom bl. a.

»Jag har flera gånger träffat aktningsvärda och med goda skolstudier försedda prästmän, som icke riktigt förstått orsakerna till månens av- och tilltagande, som om barometern icke haft annat begrepp, än att den visar tillkommande väderlek m. m. dylikt, varom varje människa borde hava riktigt begrepp. Jag har i flera kommittéer, vari jag varit ledamot, och i själva Lantbruksakademien ej sällan

erfarit, att med skäl aktade män genom total brist på kännedom av de praktiska vetenskapernas första grunder stundom trott på de orimligaste uppgifter och stundom med värme bestritt förhållanden, som bero av allmänna naturlagar, utan att det varit möjligt att överbevisa dem om villfarelsen, och jag har länge varit övertygad därom, att orsaken härtill ligger däri att vid den allmänna universitetsbildningen ingen vikt lägges vid bibringandet av naturkännedom, vilken vid utfärdandet av kunskapsbetyg icke fordras av dem, som ägna sig åt ämbetsmanna- och prästkallen. .... Jag föredrog detta förhållande hos kommittén och föreslog till dess avhjälpande, att var och en student, som ville avgå från universitetet och därefter önskade av den omständigheten, att han varit student, draga någon fördel i avseende på en blivande befordran av vad slag som helst, även till prästkallet, skulle avlägga en utgångsexamen i de första grunderna av populär astronomi, fysik, mekanik och kemi samt däröver förses med kunskapsbetyg. Jag ansåg för en så ringa fordran, att han ådagalade sig veta något om vårt planetsystem, om orsaken varför kvicksilvret stiger i barometern, varför vätskor utrinna genom en hävare, vad som föregår, när ett ljus brinner, varpå draget i våra eldstäder beror, varför isen lägger sig ovanpå vattnet, m. fl. alldagligt förekommande omständigheter, som varje människa borde veta, men varav 99 av 100 ej veta ens så mycket, att de förstå, att dessa omständigheter äro något att undra över. Denna framställning gjorde ögonblicklig verkan, majoriteten måste genom votering utrönas, och förslaget vann på en röst. Men vid protokollsjusteringen ändrade en och annan av dem, som voterat för förslaget, sin mening, och det förföll. Man beslöt, att dessa, ehuru ej till den klassiska bildningen hörande, dock ganska nyttiga kunskaper skulle inläggas i apologistelementet.» I ett brev skriver han: »I den stora kommittén lagar sig till nästa lördag en stormig sammankomst. Vi strida, om det är nödvändigt att vid den allmänna medborgerliga uppfostran, som väl ej alla, men dock pluraliteten tror vara skolors ändamål, latinska språ-

ket bör utgöra halva sysselsättningen och drivas till tala och skriva korrekt, eller om det blott bör läsas så mycket, att man förstår läsa en författare på detta språk. Järta och universitetsfolket tro, att den som ej kan tala latin duger till intet; jag som ej kan det och aldrig kunnat det och bittert beklagat, att man ej lärde mig i barndomen mer fransyska och mindre latin, rangerar mig med Tegnér, Agardh, Tannström och Lefrén, som jag tror, på den bestämda minoritetens sida.» Och på annat ställe: »Vi hava således denna senare gång ännu uträttat alls intet, och ehuru det liberalare partiet vunnit alla voteringar, varvid Järta bleknar, Wingård rodnar, Geijer svettas och Wallin pustar, så stå vi likväl oupphörligt på samma punkt, omkring vilken vi obemärkt vända oss. Jag har ledsnat och kan ej förlora min tid på så fruktlösa överläggningar. Blir det ej ändring, så går jag ej dit mer.»

Utgivaren fäller om Berzelii arbete i undervisningskommissionen följande slutomdöme: »Så helt och hållet utan påföljd torde dock Berzelii deltagande i kommitténs förhandlingar icke ha varit. Utan tvivel får man till icke ringa del tillskriva hans stora anseende, att kemien i kommittéutlåtande blev betecknad såsom 'en oumbärlig del av naturens kännedom', den där jämte fysik och naturalhistoria ansågs böra ingå i ungdomens undervisning vid elementarläroverken.» Indirekt har givetvis Berzelii kolossala och dominerande insats i kemiens utveckling, om ock sent, haft betydelse för naturvetenskapernas inträde i skolan.

G. Starck.

H. G. Söderbaum, Jac. Berzelius, levnadsteckning, utgiven av Kungl. Svenska Vetenskapsakademien. Tryckt hos Almqvist & Wiksell, Uppsala 1929. Band I, 547 + 28 sid., band II, 540 + 14 sid.

Owen William Richardson.

Louis Victor de Broglie.

Nobelpristagare i fysik.

Vetenskapsakademien har tilldelat prof. Owen William Richardson, London, och prof. Louis Victor de Broglie, Paris, resp. 1928 och 1929 års Nobelpris i fysik.

Owen William Richardson föddes i Dewsbury i det engelska grevskapet Yorkshire den 26 april 1879 och kom vid unga år till Cambridge, där han under Sir Joseph J. Thomsons skickliga ledning snart kom att fästa uppmärksamheten vid sig på grund av sina epokgörande undersökningar över elektronemissionen från glödande kroppar. Om också Richardson med sin mångsidiga läggning sedermera gjort många betydande insatser inom andra områden av den moderna fysiken och bl. a. lämnat värdefulla bidrag till de flesta frågor rörande elektriska fenomen i fasta kroppar, har han dock ägnat glödemissionen den drygaste

delen av sina forskningar. Det är också för sina arbeten inom detta område, speciellt för den fundamentalformel som bär hans namn, som RICHARDSON belönats med 1928 års Nobelpris i fysik.

Redan år 1899 hade THOMSON visat, att det då redan välbekanta fenomenet, att en laddad kropp förlorar sin laddning, om den upphettas till glödning, även inträffar i lufttomt rum. Detta måste bero på, att kroppen vid högre temperatur erhåller förmågan att utsända elektricitet. Ett närmare studium ådagalade, att i allmänhet såväl positiv som negativ elektricitet emitteras vid en första glödgning, men att efter långvarig upphettning kroppen endast behåller förmågan att avgiva negativ laddning. THOMSON studerade inverkan av magnetiska och elektriska fält på den negativa urladdningsströmmen och bevisade, att denna består av elektroner. Vid denna tid hade den klassiska elektronteorien, som betraktar elektronernas strömning i en ledare såsom strömningen av molekylerna i en gas, gjort betydande landvinningar tack vare sådana män som RIECKE, DRUDE och J. J. THOMSON. Man behöver blott erinra om, hur det enligt denna uppfattning blev möjligt att teoretiskt härleda ett uttryck för förhållandet mellan termisk och elektrisk ledningsförmåga i kvantitativ överensstämmelse med WIEDEMANN-FRANZ' berömda lag. Under antagande av, att de fria elektronerna i en metall liksom molekylerna av en gas besitta en hastighetsfördelning, fullständigt bestämd av kroppens temperatur enligt MAXWELLS lag, beräknade RICHARDSON (1901) antalet av de elektroner som på tidsenheten inifrån träffa 1 cm^2 av metallens yta med en rörelseenergi tillräcklig att övervinna de återhållande krafterna i gränsskiktet. Detta antal växer utomordentligt snabbt med temperaturen, vilket förklarar, att elektronemission i allmänhet kunnat iakttagas vid tillräckligt stark glödning. Genom att placera den glödande kroppen i ett lämpligt elektriskt fält kan man sörja för, att alla elektroner bortföras från ytan i den mån de utsändas, och så bestämma totala antalet elektroner N, som per sekund ut-

strålar från ytenheten; man mäter då den s. k. mättningsströmmen. Enligt RICHARDSONS lag, välbekant för de flesta radioamatörer, är

$$N = A\sqrt{T}\, e^{-\frac{b}{T}}$$

där A och b äro konstanter, medan T betecknar glödkroppens absoluta temperatur. RICHARDSON bevisade redan samma år genom skickligt utförda experiment giltigheten av denna formel, som han senare — liksom särskilt H. A. WILSON — även härlett på rent termodynamisk väg. Med hänsyn till resultatet av nyare teoretiska undersökningar använder man numera vanligen en av RICHARDSON alternativt föreslagen formel, som skiljer sig från den första genom att faktorn $\sqrt{T}$ utbytts mot T^2. I praktiken är skillnaden högst obetydlig. Genom en serie experiment visade RICHARDSON senare, att hastighetsfördelningen hos de utsända elektronerna är just den som man måste vänta sig, om emissionen är en följd av den livligare rörelsen hos elektronerna i kroppens inre vid ökad temperatur. Det behöver väl här knappast framhållas, vilken oerhörd och från början förvisso oanad betydelse av grundläggande art som de glödelektriska fenomenen fått för våra dagars utveckling av telegrafi och telefoni (med tråd och trådlös) liksom för den moderna högfrekvenstekniken överhuvudtaget. Formel och experiment visa, att en glödtråd kan giva strömmar av betydande storlek vid hög temperatur.

RICHARDSON har själv varit en av de främsta att föra studiet av glödemissionen vidare, såväl teoretiskt som experimentellt. Här må blott ett par ytterligare exempel anföras. Väsentligt bestämmande för emissionens styrka vid en given temperatur är konstanten b, som representerar utträdesarbetet; i lågtemperaturröret har man lyckats göra denna mycket liten genom lämpligt val av glödkropp. Detta utträdesarbete kan i viss mån uppfattas som ett ångbildningsvärme för elektronerna, liksom emissionen kan betraktas som ett slags förgasning. Den härtill erforderliga energien tages från glödtråden, som därigenom avkyles.

Förhindrar man elektronerna att lämna kroppen, genom anläggning av ett elektriskt bromsfält, stiger trådens temperatur. Det lyckades Richardson och hans elever (liksom senare även andra) att uppmäta avkylningseffekten, såväl som den motsvarande uppvärmningen vid »kondensation» av elektroner på en kall kropp, och att ur dessa mätningar beräkna ett tillfredsställande värde på konstanten *b*. Sambandet med kontaktpotential och fotoelektrisk gränsfrekvens har även klarlagts av Richardson. Under den första tiden efter Richardsons upptäckt hävdade flera forskare i motsats till denne, att glödemissionen borde tillskrivas en kemisk process. Genom en lång serie skarpsinniga experiment bevisade nu Richardson — som f. ö. själv givit exempel på, att kemiska reaktioner i vissa enstaka fall kunna ge upphov till fria elektroner — att glödemissionen från en volframtråd kan erhållas oförminskad även efter ytterst genomgripande rening och att den ej kan tillskrivas kemiska processer. Den senare forskningen på detta område — huvudsakligen koncentrerad till de stora amerikanska glödlampsfirmornas välutrustade försökslaboratorier och knuten till sådana namn som Langmuir och Dushman — har givit Richardson rätt på denna punkt. Förutom elektronemissionen har Richardson även ingående studerat den emission av positiva joner som många ämnen, särskilt salter, avge vid upphettning.

Av Richardsons insatser på andra områden må särskilt nämnas hans förutsägelse av den senare av Barnett experimentellt påvisade s. k. gyromagnetiska effekten, betydelsefulla undersökningar över fotoelektricitet och flera viktiga teoretiska arbeten över metallernas elektronteori. Sedan år 1918 har Richardson tillsammans med en rad lärjungar utfört delvis banbrytande undersökningar inom det svårtillgängliga strålningsområde, som skiljer det egentliga röntgenområdet från det yttersta ultravioletta. Om den nye Nobelpristagarens mångsidighet vittnar också den uppmärksammade serie av arbeten han under de allra senaste åren publicerat över vätemolekylens spektrum.

Redan 1906 blev RICHARDSON — vid 27 års ålder — professor i fysik vid universitetet i Princeton, New Jersey, ett av Amerikas mest bemärkta lärdomssäten för fysisk forskning. Han lämnade denna post 1913, då han mottog kallelse till den efter Nobelpristagaren BARKLA lediga professuren i fysik vid King's College, University of London, till vilket han sedan dess varit knuten. År 1924 tilldelades han ett av de tre, av den rike skotske skeppsredaren YARROW instiftade, Yarrow Research Professorships, som förvaltas av Royal Society i London.

LOUIS VICTOR DE BROGLIE är född 1892 i Dieppe. Han har studerat i Paris, där han år 1924 erövrade doktorsgraden. Sedan någon tid tillbaka är han verksam såsom professor vid Institut Henri Poincaré i Paris.

Det var i sitt doktorsarbete »Recherches sur la theorie des quanta», som den unge DE BROGLIE först framlade den teori för vilken han belönats med 1929 års Nobelpris i fysik. Det är svårt att i några få ord ge en klar föreställning om de nya och banbrytande idéer, som utvecklats i detta geniala arbete. DE BROGLIES utgångspunkt var det samband mellan massa och energi, som relativitetsteorien påvisat, enligt vilken varje energimängd E har en bestämd massa $\frac{E}{c^2}$, där c är ljusets hastighet. Omvänt representerar varje massa m en energi mc^2, och en kropp har av denna anledning, redan då den befinner sig i vila, en energi ofantligt mycket större än det tillskott som rörelseenergien betyder, vid hastigheter som äro små jämförda med ljusets. Energi och massa äro alltså enligt denna uppfattning strängt taget endast olika namn på samma fysikaliska storhet, beroende av det slag av enheter, varmed man önskar mäta denna. Å andra sidan hade kvantteorien påvisat existensen av ett intimt samband mellan svängningstal och energi; de fotoelektriska fenomenen syntes fordra, att en ljusstråle, vars frekvens är ν, består av en ström av diskreta partiklar, kvanta, med

energien $h\nu$, där h betecknar PLANCKS konstant. Det var ett lyckligt grepp då DE BROGLIE generaliserade detta sista resultat och kombinerade det med relativitetsteoriens uppfattning av energi och massa. DE BROGLIE leddes härigenom till att med varje materiell kropp (massa) förbinda en svängningsrörelse, vars frekvens är fullständigt bestämd av kroppens energiinnehåll $\nu = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h}$. Vari dessa svängningar egentligen bestå har DE BROGLIE aldrig utrett, och trots att dessa föreställningar behärska den moderna uppfattningen av materien, torde man i själva verket ännu i dag icke kunna giva något tillfredsställande svar på denna fråga. Man måste emellertid tänka sig, att svängningsfenomenet icke är begränsat till den punkt där kroppen för ögonblicket befinner sig, utan genomtränger och uppfyller hela rymden. Det fortsatta studiet av dessa hypotetiska svängningar förde DE BROGLIE till nya resultat av största intresse. Befinner sig kroppen i rörelse i förhållande till ett visst koordinatsystem, så uppfattar enligt relativitetsteorien en i detta system placerad iakttagare icke samma frekvens som en med kroppen fast förbunden. Här stötte DE BROGLIE i början på en svårighet, i det att det visade sig, att svängningsfaserna icke stämde överens i de båda systemen. För att återställa överensstämmelsen i fråga om svängningsfas var DE BROGLIE nödsakad att antaga, att svängningarna fortplantade sig med en annan hastighet än kroppen själv; betecknas denna senares hastighet med v, blir fashastigheten $u = \frac{c^2}{v}$. Det fortskridande systemet av »fasvågor» kommer härigenom att karakteriseras av en våglängd $\lambda = \frac{u}{\nu}$, som med hänsyn till vad ovan sagts kan skrivas $\lambda = \frac{h}{mv}$. Ju större kroppens hastighet och massa, desto kortare våglängden. För en vätemolekyl vid rumstemperatur är våglängden omkring 1 Å. E.; för en elektron

vars hastighet motsvarar ett genomlöpt potentialfall av en volt, 12,20 Å. E.

Vad som i denna teori synes göra mest våld på våra vanliga föreställningar torde vara antagandet att en begränsad kropp har ett vågsystem, som uppfyller hela universum. Man måste väl dock fasthålla vid att en sådan kropp har en bestämd, ändlig utsträckning, som i många fall kan mätas med stor noggrannhet. Denna svårighet löses genom antagandet att svängningarna icke alla ha exakt samma svängningstal och fortplantningshastighet; härigenom uppkomma svävningar. Inom ett visst litet område komma samtliga de olika fasvågorna att förstärka varandra och svängningarna bli särskilt stora, varemot i övriga punkter de obetydligt olika vågsystemen upphäva varandra. Enligt Schrödinger, som närmare utfört denna tankegång, utgör området för de förstärkta svängningarna just vad vi mena med kroppen själv. Redan de Broglie visade, att detta område, våggruppen, i sin helhet rör sig med samma hastighet som den materiella kroppen själv.

De Broglies djärva hypoteser fingo en slående experimentell bekräftelse, då det år 1927 lyckades de båda amerikanska fysikerna Davisson och Germer att visa, att elektroner, som med bestämd riktning och hastighet få infalla mot en kristallyta, återkastas från denna i vissa bestämda riktningar och på samma sätt som ett knippe röntgenstrålar av lämplig våglängd. Elektronströmmen förhåller sig alltså som en vågrörelse, där förhållandet mellan våglängden och atomernas inbördes avstånd i kristallen bestämmer i vilka riktningar den infallande strålen kan återkastas från kristallytan. Omvänt kunde Davisson och Germer genom att mäta reflexionsriktningen beräkna våglängden. Liknande mätningar på elektroner avböjda vid passagen genom tunna folier ha utförts av engelsmannen G. P. Thomson, tysken E. Rupp m. fl. I alla dessa fall har våglängden befunnits hava just det värde, som de Broglie teoretiskt beräknat. Dessa experiment ge ett mycket starkt stöd för uppfattningen att fasvågorna eller, som man

numera också säger, materievågorna verkligen existera. De ha därigenom också bidragit till det snabba genombrottet av den nya, i hög grad fruktbärande atomteoretiska arbetsmetod, som fått namnet vågmekaniken. Att denna allmänna teori väsentligt inspirerats av DE BROGLIES geniala idéer, har icke minst dess upphovsman, SCHRÖDINGER, med bestämdhet framhållit.

Man måste beundra den säkra intuition som ledde DE BROGLIE i hans djärva teoretiska spekulationer, vid en tid då föreställningen om fasvågor säkerligen för de flesta tedde sig som en i hög grad fantastisk tankekonstruktion utan motsvarighet i verkligheten. Redan nu har emellertid denna föreställning hunnit visa sig utomordentligt fruktbringande, och man torde kunna förutspå, att dess införande genom DE BROGLIE en gång kommer att betraktas som ett av de betydelsefullaste stegen mot lösningen av problemet om materiens och strålningens natur.

Erik Rudberg.

ARTHUR HARDEN.

HANS VON EULER.

Nobelpristagare i kemi.

Genom det beslut som Vetenskapsakademien fattat om 1929 års Nobelpris i kemi har detta delats mellan professorn vid Stockholms Högskola HANS VON EULER och professorn vid University of London ARTHUR HARDEN för deras undersökningar över sockerarters jäsning och därvid verksamma enzym. Genom detta ytterst glädjande beslut ha de två vetenskapsmän belönats, som inom jäsningskemien, ett av biokemiens viktigaste områden, äro de mest banbrytande och framgångsrika.

Den alkoholiska jäsningen av vissa sockerarter, i främsta rummet druvsocker (glukos) och fruktsocker (fruktos), inträder ju som bekant genom inverkan på sockret av i vanlig kulturjäst förekommande enzym. De reaktioner, som från de ursprungliga sockermolekylerna leda till de huvudsakliga slutprodukterna alkohol och kolsyra, äro synnerligen

komplicerade, och ett otal faktorer spela här in, varigenom utforskandet av denna sockernedbrytning utomordentligt försvåras. De forskningar på detta område, som nu belönats med den högsta utmärkelse som kan komma en kemist till del, beröra huvudsakligen de första stadierna av den serie reaktioner, som innefattas i jäsningen, men då dessa reaktioner äro gemensamma för en hel serie kolhydratomsättningar i det levande livet, förstås lätt den betydelse, som utforskandet av detta område besitter.

Den engelske forskaren Arthur Harden har framför allt inlagt stora förtjänster på det ifrågavarande ämnesområdet genom sina upptäckter angående två viktiga faktorers, nämligen fosfaters och den specifika aktivatorns eller co-enzymets, stora roll vid jäsningen. Genom E. Buchner, som för övrigt på grund av sina arbeten över jäsningen erhöll 1907 års kemiska Nobelpris, har det fastställts, att en av jäst genom rivning med kvartssand och pressning erhållen pressaft, som är så gott som fri från levande celler, kan underhålla jäsningen av socker. De vid denna jäsning verksamma faktorerna i pressaften kallades av Buchner för zymas. Harden fann, att detta Buchners jäsningsenzym kan uppdelas i två var för sig inaktiva men i blandning verksamma fraktioner, av vilka den ena är högmolekylär och icke dialysabel eller ultrafiltrerbar, medan den andra fraktionen är lågmolekylär och sålunda dialyserbar och ultrafiltrerbar. Den förra fraktionen, som utgör ett komplex av de egentliga jäsningsenzymerna, har sedan betecknats som zymas, medan den andra fraktionen, som måste betraktas som en aktivator eller komplement (co-enzym) till zymasen, sedermera har betecknats som co-zymas. Detta co-enzym är vidare i jämförelse med de egentliga enzymerna tämligen resistent mot temperaturförhöjning och det förblir sålunda aktivt vid en kort stunds kokning av en pressaft eller extrakt av jäst, under det att själva zymasen vid motsvarande behandling blir fullständigt inaktiverad. Försök av Harden att befria detta co-enzym från föroreningar kröntes icke med framgång, utan det är först genom Hans

von Eulers omfattande undersökningar, som en dylik rening av co-zymasen kunnat genomföras.

Angående fosforsyrans eller fosfaters aktiverande verkan på jäsningen hade redan 1901 Wroblewski och 1903 Buchner iakttagit densamma, men Harden har studerat denna effekt närmare och därvid kommit till synnerligen viktiga resultat. Harden fann, att vid tillsats av fosfat till en jäsande sockerlösning en hexos-difosforsyreester med sammansättningen $C_6H_{10}O_4(PO_4R_2)_2$ bildas. Genom ett noggrant studium av fosfatbindningen och produktionen av alkohol och kolsyra kunde Harden 1906 uppställa fundamentala formler för jäsningsförloppet, enligt vilka av två molekyler socker och två molekyler fosfat så mycket alkohol och kolsyra bildas, som svarar mot den ena av sockermolekylerna, under det att av den andra sockermolekylen och de två fosfatmolekylerna den nämnda fosforsyreestern (det s. k. zymofosfatet) samt vatten bildas:

$$2\ C_6H_{12}O_6 + 2\ PO_4HR_2 = 2\ CO_2 + 2\ C_2H_5OH + 2\ H_2O + \\ + C_6H_{10}O_4(PO_4R_2)_2.$$

Genom inverkan av ett särskilt jästenzym, fosfatas, kan sedan zymofosfatet undergå spaltning till socker och fritt fosfat, varigenom dessa åter kunna tillgodogöras för jäsningen enligt ovanstående formel. Man kan sålunda säga, att fosfatet beskriver ett slags kretslopp under jäsningsprocessen i det att det bindes vid sockret i vissa mellanprodukter, som sedan sönderfalla. Genom detta kretslopp och särskilt genom det förhållandet, att samtidigt med en sockermolekyls spaltning en dylik förestring av en annan sockermolekyl inträder, har man fått möjlighet att förklara de energetiska förhållandena vid jäsningsprocessen.

De ovannämnda arbetena av Harden äro emellertid av grundläggande betydelse icke endast för förklaringen och det fortsatta utforskandet av jäsningsprocessen, utan de äro av fundamental betydelse även för förklaringen av exempelvis den i djurmuskler inträdande övergången av socker till mjölksyra, såsom framgår av undersökningar av framför allt

G. Embden, H. v. Euler samt O. Meyerhof, samt vid mjölksyrejäsningen med mjölksyrebakterier enligt A. I. Virtanen. Vid dessa reaktioner synes nämligen co-zymasen samt såväl den ovannämnda hexosdifosforsyreestern som även en av Harden och Robison år 1914 isolerad hexosmonofosforsyreester liksom vid jäsningen spela en synnerligen viktig roll.

Sina arbeten över jäsningen samt jäsningskemiens utveckling överhuvud har Harden sammanfattat i en mycket värdefull monografi, »Alcoholic fermentation», som utkom i sin tredje upplaga 1923.

Genom professor Hans von Eulers på Stockholms högskolas biokemiska institut bedrivna undersökningar angående jäsningen, dess enzymkomplex (zymas) och specifika komplement, den ovannämnda co-zymasen, har vår kännedom om dessa, även för fysiologien synnerligen betydelsefulla frågor i hög grad utvecklats och fördjupats. Såväl i den djuriska vävnaden som i växten synes sockerspaltningen (hexos-nedbrytningen), en av de viktigaste funktionerna hos levande celler, börja med en serie reaktioner hos sockermolekylen (omlagring, förestring med fosforsyra och spaltning), vilka inledande reaktioner sålunda äro gemensamma i alla dessa fall. Genom ett synnerligen omfattande och ingående studium av dessa reaktioner och av olika faktorers, framför allt co-zymasens, förhållande vid desamma har Euler kunnat fastställa, att co-zymasens närvaro fordras just vid bildningen av det ovannämnda zymofosfatet eller möjligen vid någon av de tidigare reaktioner (såsom omlagring av molekyler) som slutligen leder till zymofosfatet. Då, såsom framgår av de nyaste undersökningarna på Eulers laboratorium av R. Nilsson, bildningen av den ovannämnda, av Harden och Robison upptäckta monofosforsyreestern ej synes erfordra närvaron av co-zymas, synes det sålunda sannolikt, att denna ingriper just i den omlagringsreaktion som leder från en dylik monofosforsyreester till difosforsyreestern. Då monofosforsyreestern är ett derivat av en s. k. γ-glukos, medan difosforsyreestern är ett derivat av en s. k. γ-fruktos synes sålunda co-zymasen spela en viktig

roll just för övergången γ-glukos ⟶ γ-fruktos (reduktion av aldehydgruppen och oxidation av den närliggande gruppen till ketogrupp). Detta resultat synes så mycket viktigare som denna samma co-zymas även starkt aktiverar och synes vara nödvändig för oxido-reduktion av vanliga aldehyder, t. ex. acetaldehyd under medverkan av enzymet lever-mutas. Man kan sålunda på grund av Eulers och hans medarbetares resultat anse det fastställt, att co-zymasens viktiga roll i naturen är att möjliggöra omlagringar av reagerande molekyler vid kolhydrat- och aldehydomsättningar i levande celler, varigenom de reagerande molekylerna kunna angripas av de specifika enzymerna.

Av mycket stort intresse, och som man kan hoppas genom de fortsatta arbetena på Eulers institut av klarläggande betydelse för förståendet av co-zymasens verkningssätt vid dessa omlagringsreaktioner, äro de försök, som Euler tillsammans med K. Myrbäck utfört i och för co-zymasens rening och isolering. Dessa arbeten, som sträcka sig över en lång tidrymd, ha nyligen lett till det resultatet, att co-zymasen till sin natur är en lågmolekylär förening, vars molekylvikt enligt en av Euler utarbetad diffusionsmetod kunnat bestämmas till omkring 490. Vidare har man kunnat fastställa, att co-zymasen med stor sannolikhet till sin kemiska natur nära överensstämmer med en klass tidigare kända ämnen, de s. k. nukleotiderna, i det att de renaste nu framställda co-zymaspreparaten innehålla en vid en pentos bunden purinkropp (adenin), och att den dessutom är förestrad med fosforsyra. Av särskilt intresse i detta sammanhang är iakttagelsen, att vid en gradvis genomförd avspaltning av fosforsyran ur sådana co-zymaspreparat, inaktivering av co-zymasen inträder i samma proportion som avspaltningen av fosforsyra ägt rum.

Förutom de nämnda reningsförsöken över co-zymas har Euler sedan lång tid bedrivit omfattande försök över enzymers rening. Bland de enzym, som därvid särskilt varit föremål för ingående undersökningar, står det enzym, som har förmågan att spalta rörsocker till druvsocker och

fruktsocker (invertsocker), jäsningsenzymerna nära. Detta enzym, sackaras, förekommer nämligen särskilt rikligt i kulturjäst, och det första stadiet av en förjäsning av rörsocker synes sålunda i allmänhet bestå i den enzymatiska hydrolysen av detta till invertsocker, som sedan angripes av de egentliga till zymasen hörande jäsningsenzymerna. För övrigt är sackaras mycket spridd i naturen och den torde spela en icke obetydlig roll vid åtskilliga sockeromsättningar. I samband med dessa reningsförsök har sackarasens verkningssätt ingående studerats och liknande undersökningar även utförts med andra enzym. I fråga om ett enzym, tarmpeptidas (erepsin), som i tarmen spaltar de ur äggviteämnen genom andra enzyms verkningar uppkommande peptiderna i fria aminosyror, har vid arbeten å Eulers laboratorium för första gången kunnat visas, hur bindningen av ett enzym vid dess specifika substrat kan äga rum, och därvid enzymverkan i väsentliga delar kunnat återföras på kända kemiska reaktioner.

På senare år har Euler bedrivit ingående vitaminundersökningar och därvid särskilt med avseende på de tillväxtbefordrande s. k. A-vitaminernas natur kommit till mycket intressanta resultat. Så har vid arbeten, delvis utförda gemensamt med den kände schweiziske kemisten P. Karrer, kunnat visas, att ur exempelvis morötter isolerade preparat av kolvätet karotin, vilket för övrigt är just det ämne, som meddelar morötterna deras karakteristiska färg, har en tydlig A-vitaminverkan, i det att även de renaste erhållna karotinpreparaten i så små mängder som 0,01 — 0,02 milligram per dag, givna åt möss, förmå ge tydliga tillväxtverkningar hos försöksdjuren.

Hans von Euler har över jäsningen utgivit de sammanfattande arbetena »Neuere Forschungen über alkoholische Gärung» (1914) och »Chemie der Hefe und der alkoholischen Gärung» (tills. med P. Lindner, 1915). Det stora verket »Chemie der Enzyme», som delvis utkommit i sin tredje upplaga, måste betraktas som ett av de allra bästa standardverken över enzymerna och deras kemi. En populär fram-

ställning av de nu så omdiskuterade vitaminerna och tillväxtfaktorerna har Euler givit i arbetet »Vitaminer och tillväxtfaktorer» (1924).

Hans von Euler, som 1899 blev docent vid Stockholms Högskola och 1906 professor därstädes, har utövat så gott som hela sin forskargärning vid högskolan. Genom sitt målmedvetna arbete har det lyckats Euler att där upprätta ett särskilt biokemiskt institut, vars byggnad tack vare svenskt och amerikanskt mecenatskap nu står färdig för inflyttning. I detta nya institut kommer säkerligen utforskandet av de så viktiga biokemiska problemen i framtiden att bedrivas med samma storartade intensitet och framgång som i det gamla institutet, där de resultat vunnits, som nu belönats med Nobelpriset.

Stockholms Högskola, november 1929.

Karl Josephson.

Några skolförsök med elektronröret.

Av TORSTEN WETTERBLAD.

I föreliggande meddelande beskrivna skolexperiment för demonstration av elektronrörets karakteristiska egenskaper ha iordningställts med huvudsaklig tanke på önskvärdheten av att eleverna göras förtrogna med rörets olika funktioner, behandlade var för sig, innan så pass komplicerade företeelser som radioutsändning och mottagning genomgås. Experimenten omfatta likriktning (två metoder), förstärkning samt generering av växelström med variabelt periodtal. De bägge förstnämnda effekterna kräva som alstrare av yttre impulser endast vanlig 50-periodig växelström. I alla försöken har ett och samma elektronrör använts, Telefunken *RE* 134. Anodspänningen (0—220 volt)

har över en grenledning tagits från belysningsnätet, glödström och ev. gallerspänning från ackumulatorer, den 50-periodiga växelströmmen från en enankaromformare.

1. Likriktning.

Första metoden. Denna grundar sig på anodströmskarakteristikens krökning. Kopplingen framgår av fig. 1. Variabel växelspänning tillföres gallret över en transformator (sekundärspänning 0—5 volt). Likriktningen iakttages med en demonstrationsgalvanometer, variabelt shunt-

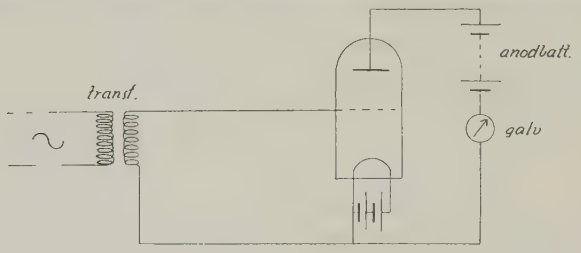


Fig. 1.

bar genom ett regleringsmotstånd. Vid ändring av växelspänningen iakttages för låga anodspänningar (< 90 volt; nedre kröken på anodströmskarakteristiken) tydlig likriktning, vilken upphör vid 90 volt för att återigen, ehuru mycket svagare, framträda för större anodspänningar (övre kröken). Tydligt skönjbart är, att vid *ökning* av växelspänningen anodströmmen *växer* för *låga* anodspänningar men *avtager* för *höga* dylika. Motsatt blir förhållandet vid *minskning* av växelspänningen. Genom påläggning av några volts negativ eller positiv gallerspänning kunna effekterna avsevärt stegras, dock framgå de fullt tydligt härförutan, speciellt den praktiskt viktigare effekten vid karakteristikens nedre krök.

Andra metoden. I radiotekniken sker likriktningen oftast på grundval av gallerströmskarakteristikens krökning.

Effekten kan mycket bra demonstreras även med 50-periodig växelström i enlighet med den koppling, som fig. 2 anger. Som anodspänning har jag använt c:a 100 volt (den raka delen av anodströmskarakteristiken svarar då mot vilospänningen 0 för gallret). Gallrets växelspänning har alltjämt varit 0—5 volt. Kapacitet och läckmotstånd måste väljas så, att största effekt och snabbaste inställning av galvanometervisaren ernås. Med gott resultat har jag använt kombinationen 0,1 μF — 100 000 à 200 000 ohm (silitmotstånd). Vid *ökad* växelspänning inträffar en kraftig *minskning* i galvanometerutslag och vice versa. Av intresse är att iakttaga, att om vid oförändrad kapacitet (0,1 μF) gallerläckans mot-

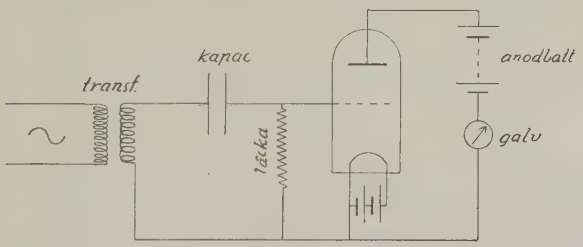


Fig. 2.

stånd göres litet (50 000 ohm eller därunder) effekten avtager eller upphör; göres återigen motståndet mycket stort (1 megohm eller därutöver) kryper visaren. Självfallet äro många olika kapacitetskombinationer möjliga för god effekts erhållande; ovan anförda meddelas endast som exempel.

2. Förstärkning.

Elektronrörets förstärkningsverkan kan lämpligen demonstreras akustiskt. Den 50-periodiga växelströmmen ger i en högtalare en tydligt uppfattbar ton. Försöksanordningen (fig. 3) innehåller en omkopplare, som möjliggör högtalarens anknytning antingen direkt till växelströmstransformatorn (sekundärspänning 5 à 10 volt) eller till anodbatteriet och därmed till röret. Anodspänningen har hållits vid 100 à 200

volt (anodströmskarakteristiken är för gallerspänningen 0 i det närmaste rak inom detta område). Förstärkningseffekten är synnerligen starkt framträdande.

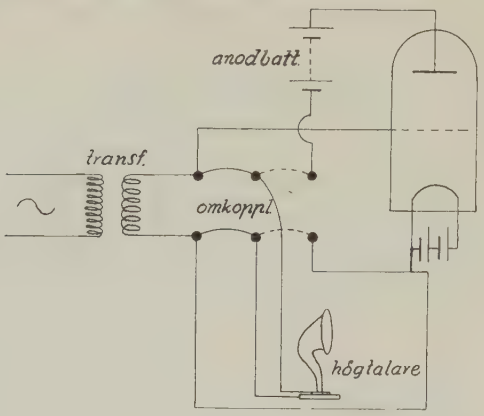


Fig. 3.

3. Generering av växelström.

Jag har i detta försök begagnat en anordning, som i princip överensstämmer med den i Pohl's bekanta *Einführung in die Elektricitetslehre* beskrivna (sid. 228 i 1927 års upplaga). En i två tidigare uppsatser[1] omnämnd induktionsspole har även nu kommit till användning. Spolen består av tre över varandra liggande, lika delar och är sålunda möjlig att använda såväl för självinduktion som för ömsesidig induktion.[2] Svängningskretsen i försöket består av en kondensator, en telefon och två av spolens delar, kopplade i serie (fig. 4). »Styrningen» av gallret åstadkommes av den tredje, i serie med de förra kopplade delen. För att svängningar skola uppkomma fordras, att kretsens kapacitet, motstånd och självinduktion, den ömsesidiga induktionen och rörets karakteristiska data stå i viss

[1] Wetterblad: *Kapacitet och självinduktion*, denna tidskrift, årg. *11*, 1928 samt *Kapacitet och självinduktion i växelströmsläran*, denna tidskrift, årg. *12*, 1928.

[2] Då spolens tre delar äro kopplade i serie, är dess självinduktion med inskjuten järnkärna c:a 1 Henry, utan järnkärna c:a 0,1 Henry.

numerisk relation till varandra.[1] Motståndet får ej vara för stort. Av denna anledning är högtalaren ersatt med en telefon (motstånd 80 ohm).[2] För att uppnå stor tonstyrka har jag hållit anodspänningen vid 220 volt. Genom variation av kapacitet (undre gräns: spolens egenkapacitet, övre

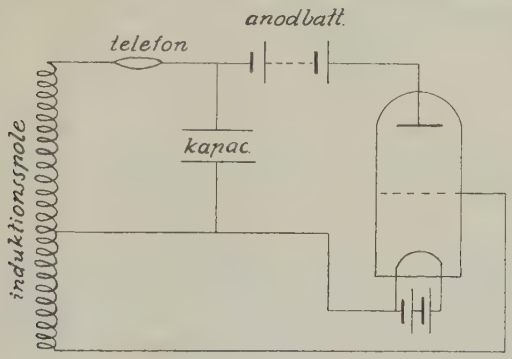


Fig. 4.

gräns: några μF) och induktion (ändring av järnkärnans läge) ha kraftigt ljudande toner av växlande svängningstal erhållits. Med fördel ha även andra kombinationer av spolens tre delar prövats: en som självinduktion och en, resp. två som ömsesidig induktion.

En i svängningskretsen i stället för telefonen inkopplad glödlampa (Osram 14 volt, 5 watt) har med lätthet bragts att starkt lysa vid olika induktions- och kapacitetskombinationer.

Det må till sist under hänvisning till en föregående uppsats[3] framhållas, att vid inkoppling av *två* telefoner i svängningskretsen akustisk interferens synnerligen väl kan demonstreras.

[1] Se exempelvis GUTTON: *La lampe à trois électrodes*, Paris 1925, pag. 57—62.

[2] Högtalaren är naturligtvis användbar, om den anslutes till svängningskretsen över en transformator med lämpligt valda motstånd. För att undvika en onödig komplikation av försöksanordningen har jag i brist på högtalare med litet motstånd föredragit telefonen.

[3] WETTERBLAD, *Några interferensförsök*, denna tidskrift, årg. *11*, 1927.

Om den matematiska behandlingen av ett tidsfördriv (S:t Peders lek).

Av GUNNAR BOLINDER.

AEGIDIUS AURELIUS[1] avslutar sin *Arithmetica*[2] med sju s. k. korollarier (»lustiga sällskapsfrågor»). Bland dem är följande:

»En venedisk köpman fraktar ett skepp till Neapolis; till honom komma 15 kristne och 15 judar och förtinga sig med honom över havet. När de kommo ut, då växte en huvudstorm i sjön, att skepparen begynte tvivla om deras välfärd, och såframt mesta delen av godset och halvparten av folket icke över bord kastades, då måste de alla samtliga i grund förgås. Här begynte de rådslå och ställa uti skepparens makt, att han dem uti en ring ställa skulle och var nionde person över bord kasta, och läto honom så begynna att räkna på vilken han först ville, till dess 15 voro utkastade. Den fromme skepparen ville gärna skona de kristne, om möjligt vore, och laga så att lotten alltid föll på judarna, att var 9:e, som utkastades skulle vara jude. Och blevo således alla judar om halsen, och de kristne behållna. Nu må en gärna veta, huruledes han dem i ordning ställt haver.»

[1] Om AURELIUS känner man blott, att han var uppsaliensare, att han blev rector scholæ i Uppsala och sedan syndicus i Stockholm. Han har levat under Johan III:s, Sigismunds, Karl IX:s, Gustav Adolfs och Kristinas, kanske in i Karl Gustavs regeringstider.

[2] *Arithmetica* är den första räknebok, som utgivits på vårt modersmål. Den vann därför stor spridning och utgick i minst 8 upplagor (1614—1705). Under ett helt sekel användes den såsom lärobok i de svenska skolorna. Enligt F. W. HULTMAN, som i en uppsats »Svenska aritmetikens historia», publicerad i *Tidskrift för matematik och fysik* av år 1868, utförligt redogör för innehållet i *Arithmetica*, karakteriseras denna räknebok bäst, om man säger, att författaren följt RAMUS i det huvudsakligaste, ehuru han saknar RAMI reda och skärpa.

Aurelius meddelar även svaret på denna fråga och tillägger, att detta framgår av vokalerna i minnesversen

Populeam virgam mater regina ferebat,

varest $a = 1$, $e = 2$, $i = 3$, $o = 4$, $u = 5$. Man skall alltså uppställa först 4 (= *o*) kristna, sedan 5 (= *u*) judar o. s. v. Skulle var tionde hava kastats över bord, skulle de ha uppställts enligt vokalerna i minnesversen

Rex Paphi cum gente bona dat signa serena.

Tidsfördrivet finnes omnämnt i ett arbete av Delin, »De matematiska vetenskapernas historia», tryckt i Uppsala universitets årskrift av 1875. Delin redogör där bland annat för runstavarnas förekomst och användning och skriver följande: »Här i Sverige har runstavarnas bruk bibehållit sig ända till förra århundradet, och har man ibland roat sig med att på dem inrista även sådana saker, som ej ha något med tideräkningen att skaffa. Så t. ex. förekommer på en runstav från 1600-talet, vilken förvaras i Nordiska Fornsakssamlingen i Uppsala, den av våra förfäder såsom tidsfördriv omtyckta S:t Peders lek, uttryckt sålunda

| | | | · · · · · | | · | | | · | · · | | · · · | · · | | ·

där punkterna betyda judar och strecken kristna.»

Genom Delin ha vi alltså fått reda på det namn, *S:t Peders lek*, våra förfäder gåvo detta tidsfördriv. Föga troligt är, att S:t Peders lek för närvarande förekommer såsom tidsfördriv i vårt land. I den samling av »matematiskt tidsfördriv till nytta och nöje», som 1922 utgavs av bokförlaget Wahlström & Widstrand, finns den ej upptagen. Den utgallringsprincip, som användes i S:t Peders lek är emellertid densamma, som allt fortfarande begagnas av barnen i deras lekar. Gäller det att välja ut en lekkamrat till någon särskild uppgift, sker detta ofta så, att alla barnen ställa sig i en ring, varefter de som få ett visst

ordningsnummer uteslutas; denna utgallring fortgår, tills endast en återstår, vilken blir den utvalde.

*

Lösningen till S:t Peders lek erhålles omedelbart på rent *empirisk* väg. Vi meddela här lösningen, dels för det fall, då var 9:e person utgallras, och dels för det fall, då var 10:e person utgallras

				14	4	7	12	1			10				5		2	8			13	15	11		6	3			9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

		6				11	13	9	1	4			15	7					2		5	12	10		14	8			3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Liksom på den förut omtalade runstaven betyda punkterna här judar och strecken kristna. Talen ovanför punkterna angiva den ordning, i vilken utgallringen av judarna företogs. Vi vilja kalla dessa tal *uttagningsnummer* för att därmed skilja dem från de tal, som angiva platsernas ordningsnummer i ringen. Dessa tal äro utsatta under punkterna; vi vilja kalla dem *placeringsnummer.*

Av intresse är att undersöka, huruvida det finns någon matematisk metod, enligt vilken de mot successiva uttagningsnummer svarande placeringsnumren kunna bestämmas. Då vi nu gå att framlägga en sådan metod, sker detta genom att lösa följande allmänna problem:

På en cirkels periferi ligga N stycken punkter. Man börjar räkna på en viss punkt (d. v. s. punkterna tilldelas placeringsnummer) *och avlägsnar var n:te punkt från periferien. Bestäm placeringsnumren för de sålunda uttagna punkterna!*

Vi dividera N med n och få m till kvot och r till rest, så att $N = mn + r$. Genom delning av cirkelns periferi kunna vi alltså erhålla m bågar, var och en med n punkter. Efter delningen återstår en båge, på vilken r punkter befinna sig. Vi vilja kalla denna båge för *rest-bågen.*

Under första varvet avlägsnas en punkt från var och en av de m bågarna; de p första bågarna berövas alltså p punkter. Vi vilja beteckna detta antal med $k_{1,p}$ för att därmed angiva, att det är fråga om uttagningen av punkter under *första varvet* och på de *p första bågarna*. Vidare observera vi, att det alltid är den sista punkten på varje båge, som borttages. Då vi alltså nått fram till slutet av *p:te* bågen, finns det ingen punkt mellan oss och den sist uttagna punkten. Detta uttrycka vi genom att säga, att under *första varvet* är för *p:te bågen* $r_{1,p} = 0$. Storheterna $k_{1,p}$ och $r_{1,p}$ erhålla vi såsom kvot resp. rest, om produkten pn divideras med n; för dem gäller alltså likheten

$$pn = k_{1,p} \cdot n + r_{1,p} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots m).$$

Sätta vi $k_{1,0} = 0$ och $r_{1,0} = 0$, gäller denna likhet även för $p = 0$.

Det första varvet är ej fullbordat, förrän vi även räknat de r punkterna på rest-bågen. Av skäl, som vi strax skola omtala, är det emellertid lämpligare att låta rest-bågen höra samman med det följande varvet. Vi begå därför nu den *formella* oegentligheten och säga, att det första »varvet» fullbordats i och med det att räknandet av den *m:te* bågens punkter avslutats. Ur *saklig* synpunkt betyder detta ingenting, eftersom vid räknandet det ena varvet kortinuerligt övergår i det andra. Undersökningen av det första »varvet» har alltså givit till resultat, att inalles $k_{1,m}$ punkter blivit uttagna, och att $r_{1,m}$ $(= 0)$ punkter återstå oräknade, då sista »uttaget» på detta »varv» äger rum.

Vi övergå nu till att bestämma det antal, $k_{2,p}$, punkter, som under andra varvet uttagas från rest-bågen och de p första bågarna. Ursprungligen funnos på dessa bågar $pn + r$ punkter. Till dessa lägga vi de $r_{1,m}$ $(= 0)$ punkter, som voro oräknade efter sista »uttaget» på första »varvet». Från summan draga vi de $k_{1,p}$ punkter, som förut borttagits från dessa bågar. Av återstående $pn + r + r_{1,m} - k_{1,p}$ punkter avlägsnas nu var *n:te*; $k_{2,p}$ erhålles alltså såsom

kvot, om detta antal divideras med n. För $k_{2,p}$ gäller alltså likheten

$$pn + r + r_{1,m} - k_{1,p} = k_{2,p} \cdot n + r_{2,p},$$

där resten $r_{2,p}$ betyder antalet punkter, som finnas kvar mellan oss och den sist uttagna punkten, då vi nå slutet av *p:te* bågen.

Den metod, vi nu använt för att bestämma $k_{2,p}$, kan även tillämpas, då $p = 0$. Genom att dividera $r + r_{1,m} - k_{1,0}$ med n erhålles såsom kvot en storhet $k_{2,0}$, som angiver det antal punkter, som uttagas från rest-bågen. Resten $r_{2,0}$ betyder antalet punkter, som finnas kvar mellan oss och den sist uttagna punkten, då vi nå slutet av rest-bågen. Den nyss uppskrivna likheten gäller alltså även för $p = 0$, och vi få

$$pn + r + r_{1,m} - k_{1,p} = k_{2,p} \cdot n + r_{2,p} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots m).$$

Härmed ha vi visat, att rest-bågen ej behöver intaga någon särställning bland de andra m bågarna. Den kan behandlas på samma sätt som alla de andra, om vi tilldela den ordningsnumret 0. Men då bör den också gå före de andra bågarna; den bör ej komma såsom avslutning på ett varv utan i stället såsom inledning till det följande varvet.

Medelst en metod alldeles analog med den nyss använda finna vi, att för storheterna $k_{3,p}$ och $r_{3,p}$, som svara mot det tredje varvet, följande likhet gäller

$$pn + r + r_{2,m} - k_{1,p} - k_{2,p} = k_{3,p} \cdot n + r_{3,p} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots m).$$

För fjärde varvets storheter $k_{4,p}$ och $r_{4,p}$ få vi likheten

$$pn + r + r_{3,m} - k_{1,p} - k_{2,p} - k_{3,p} = k_{4,p} \cdot n + r_{4,p}$$
$$(p = 0, 1, 2, \ldots m), \text{ o. s. v.}$$

Helt allmänt kunna vi alltså genom s divisioner erhålla storheterna $k_{s,p}$ och $r_{s,p}$, svarande mot *s:te* varvet. Det är emellertid att observera, att $k_{s,p}$ utgör antalet punkter, som under *s:te* varvet uttagas från rest-bågen och de p första bågarna. För att få antalet »*uttag*» *på p:te bågen* måste vi från $k_{s,p}$ subtrahera $k_{s,p-1}$, som är antalet punkter,

borttagna från rest-bågen och de $p-1$ första bågarna. Skillnaden $k_{s,p} - k_{s,p-1}$ måste tydligen vara något av talen 0 och 1, eftersom antalet punkter aldrig överstiger n på någon båge. Finna vi, att två på varandra följande k-värden, $k_{s,p-1}$ och $k_{s,p}$, äro lika stora, innebär alltså detta, att intet »uttag» förekommer på *s:te* varvets *p:te* båge.

*

Med hjälp av de sålunda beräknade k-värdena kunna vi nu lätt angiva uttagningsnumren för de borttagna punkterna. Resultatet måste naturligtvis bli de hela talen 1, 2, 3, ... Under första »varvet» avlägsnas $k_{1,m}$ punkter. Deras uttagningsnummer kunna tydligen skrivas $k_{1,p}$ för $p = 1, 2, 3, \ldots m$. Ingenting hindrar, att vi här även medtaga värdet $p = 0$. För de $k_{2,m}$ punkter, som avlägsnas under andra varvet, bli uttagningsnumren $k_{1,m} + k_{2,p}$ för $p = 0, 1, 2, \ldots m$. Det kan här inträffa, att flera på varandra följande p-värden ge ett och samma uttagningsnummer. Enligt vad vi nyss framhöllo, betyder detta, att ett »uttag» endast förekommer på den första av de mot p-värdena svarande bågarna; det är uttagningsnumret för denna punkt, vi erhålla ur $k_{1,m} + k_{2,p}$. De $k_{3,m}$ punkter, som avlägsnas under tredje varvet, ha uttagningsnumren $k_{1,m} + k_{2,m} + k_{3,p}$ för $p = 0, 1, 2, \ldots m$. För fjärde varvet få vi uttagningsnumren $k_{1,m} + k_{2,m} + k_{3,m} + k_{4,p}$, då $p = 0, 1, 2, \ldots m$, o. s. v.

Vi övergå nu till att bestämma de uttagna punkternas placeringsnummer. För de under första »varvet» borttagna $k_{1,m}$ punkterna möter detta inga svårigheter. Punkternas placeringsnummer äro nämligen allesamman mångfalder av n. Beteckna vi alltså placeringsnumren med $X_{k_{1,p}}$, få vi omedelbart

$$X_{k_{1,p}} = pn \quad (p = 1, 2, 3, \ldots m).$$

Värdet $p = 0$ ger $X_0 = 0$, vilket ju saknar varje betydelse. För att få vårt uttryck på $X_{k_{1,p}}$ i överensstämmelse med

de uttryck, vi sedermera få på övriga placeringsnummer, skriva vi detsamma sålunda

$$X_{k_{1,p}} = pn - \bar{r}_{1,p} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots m),$$

där $\bar{r}_{1,p} = r_{1,p} = 0$ för alla ifrågakommande p-värden.

Betydligt svårare är det att bestämma placeringsnumren $X_{k_{1,m}+k_{2,p}}$ för de $k_{2,m}$ »uttagen» på andra varvet. Storheten $X_{k_{1,m}+k_{2,p}}$ är tydligen på något sätt beroende av resten $r_{2,p}$. Enligt det föregående betyder nämligen $r_{2,p}$ antalet punkter, som finnas kvar mellan oss och den sist uttagna punkten, då vi nå slutet av *p:te* bågen. För att få placeringsnumret $X_{k_{1,m}+k_{2,p}}$ för ifrågavarande »uttag» böra vi alltså, utgående från slutet av *p:te* bågen, röra oss i motsatt riktning mot den vanliga. Med andra ord, vi få $X_{k_{1,m}+k_{2,p}}$ genom att *minska pn* med en viss storhet. Betecknas denna storhet med $\bar{r}_{2,p}$, kunna de $k_{2,m}$ placeringsnumren skrivas

$$X_{k_{1,m}+k_{2,p}} = pn - \bar{r}_{2,p} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots m).$$

Det gäller nu att finna sambandet mellan storheterna $\bar{r}_{2,p}$ och $r_{2,p}$. Vad som härvid gör saken rätt invecklad, är, *att* $r_{2,p}$, vilken erhålles såsom rest vid ett helt tals division med n, *förutom heltalsvärdena 1, 2, 3,* ... $(n-1)$, *även kan antaga värdet 0.* Låt oss först *tänka* oss det fall, att intet »uttag» *förut* gjorts på *p:te* bågen. I så fall vore den nu uttagna punktens ordningsnummer, från slutet av *p:te* bågen räknat, $r_{2,p} + 1$ och dess placeringsnummer $pn - r_{2,p}$. Ty om $r_{2,p} = 0$, skulle det ha varit den första punkten, från slutet av *p:te* bågen räknat, som borttagits; dess placeringsnummer är pn. För $r_{2,p} = 1$ skulle »uttaget» ha gällt den andra punkten, räknad på samma sätt; dess placeringsnummer är $pn - 1$ o. s. v. Om däremot under det föregående varvet från *p:te* bågen en punkt avlägsnats, vilkens r-värde ($\bar{r}$-värde) varit mindre än eller lika med $r_{2,p}$, måste vid bestämmandet av den nu uttagna punktens ursprungliga ordningsnummer, från slutet av *p:te* bågen

räknat, en enhet tilläggas till det nyss erhållna värdet $r_{2,p} + 1$. Ifrågavarande ordningsnummer blir alltså i detta fall $r_{2,p} + 2$; den uttagna punktens placeringsnummer är följaktligen $pn-(r_{2,p} + 1)$. Då detsamma även kan skrivas $pn - \bar{r}_{2,p}$, få vi, att $\bar{r}_{2,p} = r_{2,p} + 1$. Enligt det föregående är $r_{1,p} (= \bar{r}_{1,p})$ alltid lika med 0, och därför blir för alla ifrågakommande bågar på andra varvet $\bar{r}_{2,p} = r_{2,p} + 1$.

För de $k_{3,m}$ »uttagen» på tredje varvet kunna placeringsnumren skrivas

$$X_{k_{1,m} + k_{2,m} + k_{3,p}} = pn - \bar{r}_{3,p} \ (p = 0, 1, 2, \ldots m),$$

där $\bar{r}_{3,p}$ är en positiv storhet, som beror av den förut beräknade resten $r_{3,p}$ och av läget hos förut gjorda »uttag» på *p:te* bågen. Ett resonemang, analogt med det, vi nyss genomförde, visar, att *vi för varje under ett föregående varv från p:te bågen borttagen punkt, vilkens* $\bar{r}$*-värde är mindre än eller lika med* $r_{3,p}$, *böra öka denna storhet med en enhet.* Härvid kan det inträffa, att det nya värde, resten då erhåller, blir detsamma som ett förutvarande $\bar{r}$-värde. I så fall måste resten ökas med ytterligare en enhet. Den på detta sätt ändrade resten är lika med storheten $\bar{r}_{3,p}$ i ovanstående likhet.

Placeringsnumren för »uttagen» på fjärde varvet kunna skrivas

$$X_{k_{1,m} + k_{2,m} + k_{3,m} + k_{4,p}} = pn - \bar{r}_{4,p} \ (p = 0, 1, 2, \ldots m),$$

där $\bar{r}_{4,p}$ erhålles av $r_{4,p}$ på samma sätt som $\bar{r}_{3,p}$ nyss erhölls av $r_{3,p}$. Under femte varvet få vi placeringsnumren

$$X_{k_{1,m} + k_{2,m} + k_{3,m} + k_{4,m} + k_{5,p}} = pn - \bar{r}_{5,p} (p = 0, 1, 2, \ldots m),$$

o. s. v.

Det bör observeras, att för alla »uttag» på rest-bågen — för dessa är $p = 0$ — bli placeringsnumren negativa tal eller 0. Detta är en naturlig följd av vårt förfaringssätt att foga rest-bågen till det följande varvet. Förfaringssättet medförde stora fördelar, då det gällde att bestämma »uttagen» på rest-bågen. Vi måste emellertid nu återföra rest-

S:t Peders lek: $N = 30$, $n = 9$, $\because$ $m = 3$ och $r = 3$.

$[k_{1,0}=0]$	$[r_{1,0}=0]$	—	—	$k_{1,1}=1$	$r_{1,1}=0$	$\bar{r}_{1,1}=0$	$x_1=9$	$k_{1,2}=2$	$r_{1,2}=0$	$\bar{r}_{1,2}=0$	$x_2=18$	$k_{1,3}=3$	$r_{1,3}=0$	$\bar{r}_{1,3}=0$	$x_3=27$
$[k_{2,0}=0]$	$[r_{2,0}=3]$	—	—	$k_{2,1}=1$	$r_{2,1}=2$	$\bar{r}_{2,1}=3$	$x_4=6$	$k_{2,2}=2$	$r_{2,2}=1$	$\bar{r}_{2,2}=2$	$x_5=16$	$k_{2,3}=3$	$r_{2,3}=0$	$\bar{r}_{2,3}=1$	$x_6=26$
$[k_{3,0}=0]$	$[r_{3,0}=3]$	—	—	$k_{3,1}=1$	$r_{3,1}=1$	$\bar{r}_{3,1}=2$	$x_7=7$	$[k_{3,2}=1]$	$[r_{3,2}=8]$	—	—	$k_{3,3}=2$	$r_{3,3}=6$	$\bar{r}_{3,3}=8$	$x_8=19$
$k_{4,0}=1$	$r_{4,0}=0$	$\bar{r}_{4,0}=0$	$x_9=30$	$[k_{4,1}=1]$	$[r_{4,1}=6]$	—	—	$k_{4,2}=2$	$r_{4,2}=4$	$\bar{r}_{4,2}=6$	$x_{10}=12$	$k_{4,3}=3$	$r_{4,3}=1$	$\bar{r}_{4,3}=3$	$x_{11}=24$
$[k_{5,0}=0]$	$[r_{5,0}=3]$	—	—	$k_{5,1}=1$	$r_{5,1}=0$	$\bar{r}_{5,1}=1$	$x_{12}=8$	$[k_{5,2}=1]$	$[r_{5,2}=6]$	—	—	$k_{5,3}=2$	$r_{5,3}=2$	$\bar{r}_{5,3}=5$	$x_{13}=22$
$[k_{6,0}=0]$	$[r_{6,0}=4]$	—	—	$k_{6,1}=1$	$r_{6,1}=0$	$\bar{r}_{6,1}=4$	$x_{14}=5$	$[k_{6,2}=1]$	$[r_{6,2}=6]$	—	—	$k_{6,3}=2$	$r_{6,3}=1$	$\bar{r}_{6,3}=4$	$x_{15}=23$

S:t Peders lek: $N = 30$, $n = 10$, $\because$ $m = 3$ och $r = 0$.

$[k_{1,0}=0]$	$[r_{1,0}=0]$	$k_{1,1}=1$	$r_{1,1}=0$	$\bar{r}_{1,1}=0$	$x_1=10$	$k_{1,2}=2$	$r_{1,2}=0$	$\bar{r}_{1,2}=0$	$x_2=20$	$k_{1,3}=3$	$r_{1,3}=0$	$\bar{r}_{1,3}=0$	$x_3=30$
$[k_{2,0}=0]$	$[r_{2,0}=0]$	$[k_{2,1}=0]$	$[r_{2,1}=9]$	—	—	$k_{2,2}=1$	$r_{2,2}=8$	$\bar{r}_{2,2}=9$	$x_4=11$	$k_{2,3}=2$	$r_{2,3}=7$	$\bar{r}_{2,3}=8$	$x_5=22$
$[k_{3,0}=0]$	$[r_{3,0}=7]$	$k_{3,1}=1$	$r_{3,1}=6$	$\bar{r}_{3,1}=7$	$x_6=3$	$k_{3,2}=2$	$r_{3,2}=4$	$\bar{r}_{3,2}=5$	$x_7=15$	$k_{3,3}=3$	$r_{3,3}=2$	$\bar{r}_{3,3}=3$	$x_8=27$
$[k_{4,0}=0]$	$[r_{4,0}=2]$	$k_{4,1}=1$	$r_{4,1}=0$	$\bar{r}_{4,1}=1$	$x_9=9$	$[k_{4,2}=1]$	$[r_{4,2}=7]$	—	—	$k_{4,3}=2$	$r_{4,3}=4$	$\bar{r}_{4,3}=6$	$x_{10}=24$
$[k_{5,0}=0]$	$[r_{5,0}=4]$	$k_{5,1}=1$	$r_{5,1}=1$	$\bar{r}_{5,1}=3$	$x_{11}=7$	$[k_{5,2}=1]$	$[r_{5,2}=8]$	—	—	$k_{5,3}=2$	$r_{5,3}=4$	$\bar{r}_{5,3}=7$	$x_{12}=23$
$[k_{6,0}=0]$	$[r_{6,0}=4]$	$k_{6,1}=1$	$r_{6,1}=0$	$\bar{r}_{6,1}=2$	$x_{13}=8$	$[k_{6,2}=1]$	$[r_{6,2}=7]$	—	—	$k_{6,3}=2$	$r_{6,3}=2$	$\bar{r}_{6,3}=4$	$x_{14}=26$
$[k_{7,0}=0]$	$[r_{7,0}=2]$	$[k_{7,1}=0]$	$[r_{7,1}=7]$	—	—	$k_{7,2}=1$	$r_{7,2}=4$	$\bar{r}_{7,2}=6$	$x_{15}=14$	$[k_{7,3}=1]$	$[r_{7,3}=8]$	—	—

bågens »uttag» till föregående varv, och detta sker genom att öka deras placeringsnummer med N.

*

Härmed är det uppställda problemet löst; vi ha visat, att det finns en metod, enligt vilken de mot successiva uttagningsnummer svarande placeringsnumren kunna bestämmas. Vi vilja tillämpa metoden på S:t Peders lek och alltså bestämma placeringsnumren för de 15 judarna, som utgallrades. Detta göra vi dels för det fall, då var 9:e person borttages, dels för det fall då var 10:e person borttages. Lösningarna framgå av vidstående tabeller.

Biokemiska försök.

Av SAMUEL HENNICHS.

I. Spjälkning av fett.

1 g bukspottkörtelpulver, innehållande bland annat enzymet pankreaslipas, inväges i en bägare. (Bukspottkörtelpulver kan erhållas på apotek.) Härefter tillsättes 5 cm^3 destillerat vatten och 5 cm^3 matolja. Blandningen omskakas väl och uppvärmes under någon tid till 40°. Uppvärmningen kan verkställas så, att en bägare på cirka 500 cm^3 fylles till $^2/_3$ med vatten och upphettas medelst en evighetslåga, då ovannämnda temperatur ungefärligen inställer sig. Bägaren med provet nedföres häri. Medelst titrering med 1 n NaOH påvisas fettets spjälkning. Som indikator användes fenolftalein. Reaktionen avbrytes genom tillsats av 40 cm^3 96 %-ig alkohol samt något eter. Härvid går allt i lösning utom enzympulvret. Då det senare är surt, måste ett blindprov med ovanstående ingredienser tillblandas. Till detta sättes alkohol direkt och titreras.

Ett försök med ovanstående mängder gav följande resultat. Blindprovet förbrukade 2,00 cm^3 1 n KOH, ett annat prov efter en timme 5,79 cm^3, beroende på bildad fettsyra, och ett tredje efter 2 dygn 7,60 cm^3.

II. Koagulering.

Koagulering av mjölk med ostlöpe enligt MOLL-STARCKs lärobok.

III. Spjälkning av äggvita.

Ett ägg kokas 10 minuter. 10 g av vitan sönderdelas i mycket små delar t. ex. genom att det får passera genom en sikt. Äggvitan nedföres i en flaska och försättes med 1 g pepsin, 100 cm^3 destillerat vatten och 3 cm^3 2 n HCl. Blandningen hålles vid c:a 45° C och omskakas då och då. Efter någon tid (ett par timmar till något dygn, beroende på pepsinpreparatets aktivitet) har äggvitan fullständigt gått i lösning under delvis bildning av albumoser och peptoner.

IV. Spjälkning av stärkelse.

En högaktiv amylaslösning kan erhållas genom extraktion av malt. Malt erhålles från bryggerierna, där det finnes dels grönmalt, dels torrmalt. Det senare framställes av det förra genom torkning och putsning.

Till 350 g krossat torrmalt sattes 450 cm^3 destillerat vatten samt något toluol. Blandningen fick stå 2 dygn under upprepad omskakning. Härefter filtrerades. Enzymlösningen hade grönbrun färg samt intog en volym av 190 cm^3. Enzymlösningen är under toluol mycket hållbar.

Med denna enzymlösning kan stärkelsens successiva övergång via dextriner till maltos påvisas.

Verkan visade sig vara för stark, varför 4 cm^3 av filtratet utspäddes till 100 cm^3 i en mätkolv (utspädn. 1: 25). Härefter tillagades en 1 %-ig stärkelselösning på vanligt sätt. 90 cm^3 destillerat vatten uppkokades, varefter 1 g löslig stärkelse (Mercks preparat), utrörd i 10 cm^3 vatten, nedhälldes. Potatismjöl kan även användas.

7 st. provrör beskickades med 5 cm^3 av stärkelselösningen, sedan denna kallnat. Till provrören sattes i ordning 0, 1, 2, 3, 4, 4 och 3 cm^3 av den utspädda enzymlösningen. Det sista provet nedsattes i en bägare med 50-gradigt vatten.

Det första röret späddes med vatten till 1 cm under kanten, varefter några droppar jodlösning tillsattes till full blåfärgning.

Efter 5 minuter visade sista provet (i varmvatten) efter spädning och jodtillsats ingen stärkelsereaktion. Samtidigt gav näst sista provet blåfärgning med dragning åt violett. Temperaturförhöjningen har sålunda åstadkommit en större reaktionshastighet, trots den mindre mängden enzym.

Efter 15 minuter tillsattes jod till alla proven och utspäddes. Härvid visade:

prov 2 stark blåfärgning men svagare än prov 1,
prov 3 blåviolett färg,

prov 4 rödviolett färg och
prov 5 ingen reaktion.

Prov 2 och 3 innehöllo sålunda ännu stärkelse, prov 3 och 4 dextriner och prov 5 väsentligen maltos.

Försöket visar reaktionshastighetens beroende av enzymkoncentration och temperatur samt stärkelsens successiva spjälkning.

250 g grönmalt extraherades med 250 cm^3 destillerat vatten samt toluol ett dygn.

Efter filtrering erhölls en enzymlösning på 130 cm^3.

Med denna gjordes samma försök som ovan efter utspädning 1: 10.

V. Jäsningsreaktionen.

A. Om i något bagerijäst inknådas litet socker, flyter det hela sönder om en stund på grund av inträdande plasmolys.

Egenskaper hos jäsningsreaktionen, som äro lätta att visa, äro jäsningshastighetens ökning genom tillsats av fosfat och av jästextrakt. (Detta innehåller jäsningsenzymets så kallade Coenzym.)

För att visa dessa reaktioner utgår man från bryggerijäst. Denna erhålles uppslammad i vört.

30 cm^3 färsk bryggerijäst samt 2 cm^3 10 %-ig Na_2HPO_4 och 2 cm^3 10 %-igt KH_2PO_4, nedföras i en erlenmayerkolv, varefter tillsättes 1 g druvsocker. Kolven korkas, och gasen uppsamlas i ett upp- och nedvänt, helst graderat rör. Reaktionshastigheten framgår av följande tabell:

Tid.	Utvecklad volym kolsyra.
5 minuter	32 cm^3
10 »	60 »
15 »	100 »
20 »	130 »

Att den utvecklade gasen är CO_2 kan lätt påvisas.

B. *Inaktivering med toluol.*

Samma reaktionsblandning men med 3 cm^3 toluoltillsats.

Tid.	Utvecklad volym kolsyra.
5 minuter	10 cm^3
10 »	20 »
15 »	25 »

Alltså tydlig hämning av reaktionen.

Tillsats av toluol inaktiverar zymasen reversibelt, men däremot icke enzymet sackaras, som förut framhållits.

C. *Aktivering med fosfat.*

För att visa denna effekt, måste man framställa torrjäst. Den levande jästen suges möjligast torr på Büchnertratt och utbredes i tunt lager på filtrerpapper och får torka några dygn. Härefter males den torra återstoden.

Av $1\frac{1}{2}$ l levande bryggerijäst erhålles c:a 270 g torrjäst. Till två erlenmayerkolvar invägas 1 g druvsocker och 5 g torrjäst. Till det ena provet sättes 24 cm^3 vatten, till det andra 20 cm^3 destillerat vatten, 2 cm^3 10 %-igt Na_2HPO_4-lösning samt 2 cm^3 10 %-igt KH_2PO_4-lösning. Resultat:

Tid.	Utvecklad volym CO_2. Utan fosfat.	Med fosfat.
$\frac{1}{2}$ timme	18 cm^3	68 cm^3
1 »	48 »	98 »

Alltså en tydlig aktivering.

Gasutvecklingen börjar först efter 10 minuter, vilket torde bero på, att först hexos-fosfat, vilket är nödvändigt för jäsningen, måste bildas, innan själva jäsningen kan börja. Om man tillsätter natriumhexosdifosfat från början, inträder reaktionen omedelbart. Detta salt är emellertid svårt att framställa.

D. *Aktivering med Co-enzymet.*

1) En del av torrjästen tvättas 4—5 gånger med vatten. Denna tvättning får ej taga längre tid i anspråk än c:a 5 timmar. Genom dessa tvättningar går Co-enzymet i lösning. Härefter torkas jästen i tunt lager på glasskivor.

2) 50 cm^3 färsk jäst röres ned i 150 cm^3 80-gradigt vatten och filtreras. Vid denna temperatur dö jästcellerna. Co-enzymet befinner sig löst i filtratet.

5 g tvättad torrjäst, 1 g socker, 10 cm^3 destillerat vatten och 4 cm^3 av ovanstående fosfatlösning giva inom 2 timmar ingen gasutveckling.

Samma reaktionsblandning med 10 cm^3 av Co-enzymlösningen giver efter $\frac{1}{2}$ timme 21 cm^3 och efter 1 timme 50 cm^3 CO_2. Co-enzymlösningen är i och för sig inaktiv, men aktiverar tvättad jäst.

VI. Katalasverkan.

1 hg svin-, häst- eller kalvlever males 2 gånger i en köttkvarn, varefter den blandas intensivt med 100 cm^3 destillerat vatten. Härefter passeras blandningen genom en duk. Det, som går igenom, utgör vår enzymlösning.

12 cm^3 30 %-igt H_2O_2 spädes till 1 l med destillerat vatten. Detta är vår substratlösning.

50 cm³ av substratlösningen nedföres i en erlenmayerkolv på 100 cm³, varefter 2 cm³ av enzymlösningen tillsättes. Härefter slutes flaskan med en gummipropp, som genomdrages av ett avledningsrör, varigenom den utvecklade syrgasen uppsamlas i ett upp- och nedvänt, vattenfyllt provrör, vilket hålles i ett stativ över en vanna.

De närmaste minuterna inträder en livlig gasutveckling. Reaktionskolven bör omskakas. Snart avmattas emellertid reaktionen. Då markeras vätskenivån i provröret med en gummisnodd, varefter den utvecklade gasens volym lätt bestämmes så, att provröret fylles till gummisnodden, och innehållet uthälles i en mätcylinder.

Vid ett försök erhölls 62 cm³ inom 5 minuter.

Härefter kan aciditetens inverkan demonstreras.

Vid tillsats av.	Utvecklad volym syre.
1 cm³ 2 n HCl	— —
$\frac{1}{2}$ » »	4 cm³
$\frac{1}{10}$ » »	20 »
En droppe »	56 »
Ingenting	62 »
4 droppar 2 n NaOH	66 »

I den med NaOH försatta lösningen är reaktionen något förstärkt, beroende på, att reaktionen är hastigast i neutral lösning. Leverextraktet är nämligen självt något surt. På den alkaliska sidan kunna vi ej fullfölja undersökningen, då väte-superoxiden här är underkastad en vittgående självspjälkning, som förrycker resultaten.

VII. Reduktasverkan.

I ett starkväggigt provrör nedföres c:a $\frac{1}{2}$ g torrjäst, uppslammad i 5 cm³ H_2O. Vidare nedföres ett c:a 5 mm vitt och 5 cm långt rör innehållande $\frac{1}{2}$ cm³ metylenblåttlösning ($\frac{1}{2}$ g per l). Det stora röret slutes med en gummipropp, genom vilken går ett kranrör. Röret evakueras på vattensug, kranen stänges. Genom att luta på röret, blandar man jästen med metylenblåttlösningen. Den blåa färgen försvinner snart, då färgämnet reduceras till sin så kallade leukoförening. Om luft insläppes, och röret skakas, oxideras leukoföreningen av luftsyret åter till det blåa färgämnet.

Till sist måste framhållas, att ovanstående kvantitativa uppgifter naturligtvis ej få betraktas som definitiva, utan de äro endast avsedda till vägledning.

En kalorimeter av massiv koppar för skolbruk.

Som bekant äro försöken med vattenkalorimetern behäftade med stora felkällor, vattenavdunstning, vattnets kringstänkande, då fasta kroppar iföras etc. Dessa felkällor kunna undgås, om man i stället använder kalorimetrar av massiv metall. Metallkalorimetrar med vakuummantel användes första gången av *Nernst* och *Eucken* år 1909 för bestämning av metallernas spec. värme vid låga temperaturer. En liknande kalorimeter har också använts av *Nernst*, *Koref* och *Lindemann* vid temperaturer omkring rumstemperaturen.

Sistlidna vårtermin lät jag mina elever bestämma tennets smältvärme med en massiv kopparkalorimeter av mycket enkel konstruktion. Kalorimetern består av en 1 dm lång kopparbult med 5 cm diameter. I dennas mitt är ett 7 cm djupt hål borrat. Hålets diameter är 1,4 cm. Dessutom finnes ett 8 cm djupt hål för en termometer. Den kalorimeter, som användes vid följande, av elever utförda försök, vägde 1715 g.

Kalorimetern avkyldes under vattenledningen till några grader under rumstemperaturen (18°) och avtorkades. Den placerades därefter på tre korkfötter och omgavs med bomull till skydd mot luftdrag.

I urborrningen nedfördes ett till ett rör hoprullat bleck av schablonkoppar (vikt 2,53 g). På grund av fjädringen i kopparblecket ligger detta tryckt emot urborrningens väggar, varigenom god värmekontakt erhålles. I hålets botten placerades också ett runt kopparbleck.

Under det att tennet smältes i en liten järnskopa, började temperaturavläsningarna, vilka utfördes var halvminut (se tabellen). Efter 1,5 min., d. v. s. efter fyra temperaturavläsningar, hälldes det nätt och jämnt smälta tennet genom en papperstratt ned i urborrningen. Avläsningarna fortsattes tills termometern under ett par avläsningar visade ett konstant värde.

Härefter drogs kopparblecket, på vilket tennet sitter fast, upp ur urborrningen och vägdes (43,94 g). Tennets vikt var alltså $43{,}94 - 2{,}53 = 41{,}41$ g.

Tid	Temp.	
0 min.	15,96	
0,5 »	15,97	
1,0 »	15,99	
1,5 »	16,00	Beg. temp. Tennet ihälldes
2,0 »	17,51	
2,5 »	19,20	
3,0 »	21,00	
3,5 »	21,90	
4,0 »	22,30	
4,5 »	22,45	
5,0 »	22,59	
5,5 »	22,60	
6,0 »	22,60	Sluttemp.

Av de erhållna data erhålles följande ekvation för beräkning av tennets smältvärme.

$$41{,}41 \cdot x + 0{,}055 \cdot 41{,}41 \cdot 209 = 0{,}093 \cdot 1717 \cdot 6{,}60$$
$$x = 13{,}5.$$

Samma försök utfördes av flera laborationslag, varvid genomgående goda resultat erhöllos.

Av tabellen framgår att tiden för temperaturutjämning belöpte sig till fyra min., vilket kanske kan tyckas vara väl lång tid. Men man får väl snarare betrakta detta som en fördel framför vattenkalorimetern, där temperaturen på några sekunder i det närmaste når det slutliga värdet. Eleven hinner vid ifrågavarande försök att noga följa temperaturändringen.

En annan fördel framför vattenkalorimetern äga kalorimetrar av massiv metall däruti, att ingen omröring behöves, varigenom elevens uppmärksamhet mera kan koncentreras till termometern.

I en senare tillverkad kalorimeter har den centrala urborrningens diameter ökats till 1,8 cm. Ett 1 dm långt kopparrör — 1,5 mm godstjocklek — har försetts med hårdlödd kopparbotten och inpassats i urborrningen. Röret och urborrningen ha gjorts svagt koniska för att kontakten skall bli god. Med denna kalorimeter ha mycket goda värden erhållits på såväl isens smältvärme som vattnets ångbildningsvärme. Den tillförda mängden is, resp. ånga, bestämmes genom vägning av det inre röret före och efter försöket.

Folke Gunneson.

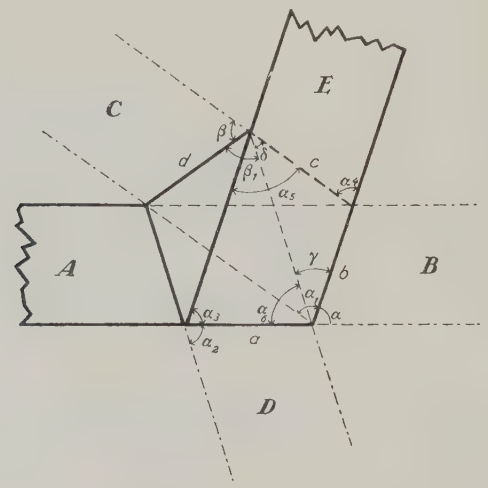
Formen på en enkel knut.

Följande problem framställdes på sin tid av IVAR DAMM, sedermera lektor i Gävle.

Bevisa, att om man knyter en enkel knut på ett tunt jämnbrett band, så erhålles en regelbunden femhörning.

Analys. Man knyter en sådan knut och drar åt så långt det går utan att skrynkla bandet, löser sedan upp knuten och viker bandet utefter samma kanter som förut utan att träda in ena änden i något veck. Då visar det sig, att knuten kan tänkas vara uppkommen på följande sätt:

Bandet AB vikes utefter en rät linje b, varvid änden B kommer i ett nytt läge, C. Då blir vinkeln $\alpha_1 = \alpha$. Sedan vikes änden C kring en linje d så belägen, att C kommer i läget D (bandets ena kant skall gå genom ena ändpunkten av b). Då blir $\beta_1 = \beta$. När änden D slutligen vikes omkring a, så skall den komma i läget E (bandets kanter skola gå genom ändpunkterna av c). Då blir $\alpha_3 = \alpha_2$.



Bevis. Emedan bandets kanter äro parallella, så är

$\alpha_3 = \alpha$ (likbelägna), $\alpha_4 = \alpha_1$ (likbelägna), $\alpha_5 = \alpha_4$ (alternat), $\alpha_6 = \alpha_2$ (alternat),

$$\therefore\ \alpha_6 = \alpha_5 = \alpha_4 = \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = \alpha.$$

Dragas höjderna (ej utritade i figuren) i parallelltrapetset (b, d) från ena ändpunkten av b och av d, fås $b \sin \alpha_1 = d \sin \beta$. Av parallelltrapetset (a, d) fås likaledes $a \sin \alpha_2 = d \sin \beta_1$, och av parallelltrapetset (a, c) erhålles $a \sin \alpha_3 = c \sin \alpha_5$.

$$\therefore\ c \sin \alpha = a \sin \alpha = d \sin \beta = b \sin \alpha, \text{ varav}$$

$$b = c \text{ och således vinkeln } \delta = \gamma.$$

Men $\gamma = 180^\circ - \alpha - \alpha_6 = 180^\circ - 2\alpha$, $\delta = 180^\circ - \beta - \beta_1 = 180^\circ - 2\beta$; $\therefore\ \alpha = \beta$ och $a = b = c = d$.

Nu är $\alpha_6 + \alpha_3 + (\alpha_5 - \delta) = 180^\circ$ d. v. s. $3\alpha - (180^\circ - 2\alpha) = 180^\circ$ eller $5\alpha = 360^\circ$, $\therefore\ \alpha = 72^\circ$,

varav följer, att figuren blir en regelbunden femhörning.

Anm. Härmed är bevisat, att figuren *måste* vara en regelbunden femhörning, om en sådan knut överhuvud taget är möjlig att åstadkomma. Rent geometriskt sett bör således även bevisas, att de givna villkoren, som äro lagda på figuren, äro möjliga att satisfiera, m. a. o. det fattas ett geometriskt *existensbevis* för knuten. Antages nu figuren vara en regelbunden femhörning, så äro enligt den regelbundna femhörningens kända egenskaper diagonalerna parallella med var sin sida, och avstånden mellan diagonalerna och deras motsvarande sidor äro lika stora. Vidare är $\alpha = \beta = \alpha_2 = 72^\circ = \alpha_1 = \beta_1 = \alpha_3$, varav följer, att alla villkoren vid knytningen äro uppfyllda av den regelbundna femhörningen.

Henrik Petrini.

Bokanmälningar.

RYDBERG-WAHLSTRÖM, *Matematiska uppgifter givna i studentexamen på latinlinjen V. T. 1896—V. T. 1929.* Urval med svar och anvisningar. Åttonde uppl. omredigerad av B. WAHLSTRÖM. P. A. Norstedt & Söner (Svenska Bokförlaget), Stockholm 1929, 72 sid., häft. kr. 1: 20.

Av denna samling studentproblem har nu 8:e upplagan utkommit med exempel t. o. m. vårterminen 1929 och med ny genomgående numrering. En hel del problem av äldre typer ha gallrats ut — det är verkligen skönt att detta kunnat ske. Vad man än må säga om dessa »allmänna» problem på lägre stadier, i studentexamen höra de verkligen ej hemma. Fast nog kommer jag att just för deras skull behålla mitt exemplar av den äldre upplagan. En del av dessa exempel äro roliga. Lantbrukaren, som inte ville tala om, hur många kor och får han hade utan svarade: »Fårens antal är 389 större än kornas; multiplicerar man de förras antal med de senares, erhåller man 79476», har stundom lockat mig till funderingar. Inte över djurens antal men över problemet: i vilken trakt av jorden finnas dylika lantbrukare?

Man må hoppas, att då studentexamen om något år skall hållas på latinlinjen efter de nya kurserna, exempel av denna typ ej må dyka upp igen, så att den 9:e upplagan får redigeras ut ur motsatta synpunkter mot dem, som nu kunnat anläggas!

Men det är ännu för tidigt att profetera om den saken. Ännu så länge är en samling som denna »nödvändig och tillräcklig» på latinlinjen och — som utgivaren påpekar i förordet — den kan även med fördel sättas i händerna på realister, som behöva en exempelsamling på dessa delar av kursen.

En nummerförteckning över de sista årens uppgifter är en välkommen nyhet för denna upplaga.

Bengt E. Nyström.

SIGFRIDS ADOLF, *Elementär Elektroteknik.* Del I. P. A. Norstedt och Söner 1919, 104 sid. häft. kr. 6: 50. Del II och III. Ivar Hæggströms förlag, Stockholm 1923 och 1928; 208 och 232 sid., häft. kr. 6: — och 7: 50.

Första delen av »Elementär Elektroteknik» förtydligas enligt författarens underrubrik med »erforderliga drag av elektricitetslära». För att göra författaren full rättvisa må emellertid upplysas om, att dessa drag ej äro alltför matta, utan att delen i fråga icke är någonting annat än vad man i vanlig läroboks-litteratur helt enkelt kallar elektricitetslära med några praktiska tillämpningar. I andra delen behandlas maskiner och mätare för likström och växelström jämte erforderliga fysikaliska grunder. Tredje delen omfattar manöver- och skyddsapparater och i sammanhang därmed redogöres för det elektriska fältet samt för ledare- och isolationsmaterial. Samtliga delar äro illustrerade, och texten är belyst med tabeller, kurvor och räkneexempel. Första delen är utarbetad uteslutande av författaren, andra delen under konsultativ medverkan av flera fackmän och tredje delen under medverkan av fackmän. Det lider intet tvivel om att bokens värde ökat väsentligt, i den mån som fackmännen anlitats, och det kan med fullt fog sägas, att de båda sista delarna väl fylla ett verkligt behov inom den inhemska litteraturen på den rent praktiska elektroteknikens område.

Vad arbetets uppdelning beträffar, så förefaller det, som denna vore onödigt långt driven i paragrafer med avdelningar och underavdelningar i massa. Framställningens tydlighet vinner knappast härpå. Ej heller bidraga de alltför ofta förekommande hänvisningarna till att underlätta läsningen, och överflödet på de använda stilarterna verkar snarare förvirrande än klargörande. Dessa förhållanden försvåra bokens användning som lärobok, då däremot dess förtjänster som uppslagsbok knappast beröras därav. *Nils Åkesson.*

ASSAF GÖRANSSON, *Lärobok i elektroteknik* för praktiska ungdomsskolor, P. A. Norstedt & Söner (Svenska Bokförlaget), Stockholm 1929, 80 sid., pappersband kr. 2:—

Det 80 sidor starka häftet avser enligt företalet att giva en för praktiska ungdomsskolor anpassad allmän orientering i elektrotekniken på grundval av i folkskolan inhämtade förkunskaper i matematik och fysik. Vid framtällningen har som naturligt är huvudvikten lagts vid elektrodynamiken. Växelströmsläran har fått en ganska framskjuten plats. Elektriska installationer och den elektriska strömmens inverkan på människokroppen ha behandlats i var sitt kapitel. — Enligt anmälarens åsikt borde författaren ha medtagit åtminstone något om elektrisk influens, helst som detta fenomen ju ligger till grund för den i början omnämnda egenskapen hos en gniden

lackstång att draga till sig lätta kroppar. — Mot författarens terminologi måste på några punkter invändningar göras. På ett ställe heter det: »elektricitet och värme äro två olika slag av energi (= kraft, arbetsförmåga)», på andra ställen påträffas meningar som »en kilowattimme är ett mått på elektrisk kraft» och »genom en ackumulators laddning magasineras i denna elektrisk kraft». En av fysiklärarens viktigaste men svåraste uppgifter är just att i eleverna inpränta *skillnaden* mellan energi, arbetsförmåga (effekt) och kraft. Det är visserligen ett lovvärt syfte att popularisera vetenskapen men det bör icke ske på bekostnad av de fundamentala begreppens stringens.

Potential kallar författaren på ett ställe för spänning, potentialdifferens för spänningsskillnad, senare åter användes spänning såväl för potential som potentialdifferens. Överhuvudtaget verkar författarens framställning oklar, så snart det gäller spänning. Uppgiften är ingalunda lätt, det medgives gärna. På tal om trefasgeneratorn säger författaren: »vid stjärnkoppling förenas alla fasernas början med varandra; det kan visas, att spänningen i föreningspunkten alltid blir = 0». Detta låter onekligen ganska besynnerligt. Några rader senare heter det: »Vid triangelkoppling användes ej nolledning och någon fasspänning kan tydligen ej erhållas.» Åt begreppet fasspänning har författaren givit den mindre lyckade innebörden, att densamma endast kan existera, om nolledning finnes. — Det hade varit klokt, om författaren för att undvika förväxling av voltmeter och voltameter hade för den senare infört den numera brukliga benämningen coulometer. — Urladdningar i förtunnade gaser och elektronröret ha helt förbigåtts. I den nutida tekniken spela de dock en stor roll.

Räkneexempel och figurer förefalla väl valda. Boken kommer säkerligen att intressera eleverna. Framställningen är i allmänhet medryckande. *Torsten Wetterblad.*

Erik Nilsson, *Laborationsuppgifter i magnetism och elektrostatik.* P. A. Norstedt & Söner (Svenska Bokförlaget), Stockholm 1929, häft. kr. 1:—

Det lilla häftet inrymmer en serie väl närmast för realskolan avsedda laborationsuppgifter. Samtliga försök synas vara ur metodisk synpunkt riktigt lagda, och författaren har utan att komma med några nyheter tillvaratagit alla detaljer för en allsidig och intresseväckande belysning av det åt laborationen ägnade området. För behövlig materiell finnes förteckning i slutet av häftet. Den är genomgående av enkel beskaffenhet, och försöken kräva som sig bör inga komplicerade anordningar.

På en punkt måste en gensaga riktas mot det eljest ur många synpunkter förträffliga häftet: priset är alldeles för högt tilltaget. Häftet innehåller, bortsett från titel och förord, ej fullt 14 sidor, därav närmare 5 sidor illustrationer. För 1 krona borde man även kunna erhålla laborationsuppgifter i elektrodynamik. *Torsten Wetterblad.*

C. G. HELLSTEN, *Experimentell fysik och astronomi.* Första delen: Statik och värmelära samt magnetism och elektrostatik. Fjärde uppl., omarbetad under medverkan av ANTON FRENDEL. P. A. Norstedt & Söner (Svenska Bokförlaget), Stockholm 1929. 127 sid., kart 1:75.

IVAR J:SON MALMBORG, *Övnings- och lärobok i fysik för realskolan.* Första årskursen (statik, värmelära, magnetism, elektrostatik.) Femte uppl. P. A. Norstedt & Söner (Svenska Bokförlaget), Stockholm 1929, 68 sid., pappersb. kr. 1:60.

Av dessa välkända läroböcker, som ju båda utgått i flera upplagor, var HELLSTENS den, som tidigast utkom (1911). Den var resultatet av ett mångårigt och framgångsrikt arbete på att utforma en fysikundervisning med elevlaborationer såsom grundval och avpassad för skolans mellanstadium. HELLSTENS lärobok har under åren gjort den svenska fysikundervisningen stora tjänster; lärare och läroboksförfattare ha haft mycket att hämta ur den.

Många, som högt värdesatte bokens goda uppslag, funno emellertid snart, att den såsom lärobok hade påtagliga brister. Förf. sökte ernå den eftersträvade intima anslutningen mellan lärjungelaborationer och lärostoff genom att till avsevärd del ge framställningen formen av laborationsredogörelser, där eleven i första person redogjorde för sina rön. Men på såväl eleven som läraren verkade denna ensidiga framställningsform i längden tröttande på samma gång den gav stilen en bredd, som tvingade till en alltför stor inskränkning av lärostoffet, och som dessutom menligt inverkade på översikten, vilket bäst visade sig vid repetitioner.

MALMBORGS lärobok framträdde såsom representant för en diametralt olika lärobokstyp. Med sådana läroböcker som t. ex. de tyska NATH-KLEIBERS som förebild sökte denne ernå en mera koncentrerad och översiktlig framställning genom att indela stoffet i korta kapitel och paragrafer med genom olika stilsorter poängterade rubriker och text. Ur fysikalisk synpunkt blevo MALMBORGS böcker mera givande än HELLSTENS. Under det dennes framställning ur formell synpunkt var mönstergill,

kunde detsamma ej alltid sägas om MALMBORGs. Med fog kunde man anmärka rätt mycket i detta avseende. Översikten äventyrades för övrigt ibland genom onödiga upprepningar, och på grund av de ytterst koncentrerade satserna och många stilsorterna fick det hela något oroligt över sig.

Bägge författarna ha nu påbörjat en omarbetning av sina läroböcker, vilka samtidigt anpassats efter de nya skolförhållandena. Att döma av den första del, som nu föreligger, har såväl den ena som den andra boken vunnit på omarbetningen, vilken i fråga om HELLSTENS lärobok gjorts mycket grundlig. Man finner nu hos H. en klar och ledig lärobocksstil; det gamla framställningssättet har helt övergivits. Elevlaborationerna ha skilts från texten och sammanförts i särskilda avdelningar i slutet av varje kapitel. Samtidigt har lärostoffet något utökats med aktuella och intresseväckande saker.

MALMBORG har sovrat sitt alltför rika material och samarbetat det till större översiktlighet. Helt ha dock upprepningar ej undvikits, vilket må belysas med ett exempel från sid. 14 och 15, där fig. 28 och 29 med åtföljande text utgöra en onödig rekapitulering av sid. 12. Ibland har förf uteslutit rätt så kraftigt; eller bör ej t. ex. något nämnas om den öppna manometern, om sambandet mellan tryck och volym hos en gas, om Fahrenheits gradering, eller med några siffror belysas fasta kroppars och vätskors värmeutvidgning?

I HELLSTENS bok är innehållet synnerligen rikligt. De många goda experimentförslagen — försedda med hänvisningar till diverse experimentböcker — komma säkerligen att med glädje utnyttjas inte minst av eleverna vid försök på egen hand. Att H. ej medtagit blocket och den hydrauliska pressen, beror väl förmodligen på att dessa komma att införas i en senare del, avsedd för realskolans sista klass, där enligt kursplanen »enklare maskiner för mekanisk kraftöverföring» skola behandlas.

I metodiskt avseende bindes läraren på ett enligt recensentens mening mindre lyckat sätt, hos MALMBORG i kalorimetrin, hos HELLSTEN i kap. om vätskors tryck. Den förre behandlar kalorimetrin i ordningsföljden: smältvärme, ångbildningsvärme, spec. värme, varvid det sistnämnda begreppet experimentellt utredes med hjälp av det förstnämnda. Är det ej värmetillförsel med temperaturhöjning — spec. värme — som är det primära och som först bör utredas? Och är det ej mot denna bakgrund, som värmetillförsel utan temperaturstegring — latent värme — framstår såsom något anmärkningsvärt?

I HELLSTENS lärobok är i denna, liksom i föregående upplagor, kapitlet om vätskors tryck fastlåst vid och uppbyggt

på försök med »tryckvågen» (ett U-rör med kvicksilver nederst och specifikt olika vätskor i skänklarna). Recensenten har aldrig kommit till rätta med denna framställningsmetod. »Tryckvågen» måste handhavas med stor försiktighet, om man vill förebygga missuppfattningar hos eleverna. Rec. har vid användning av H:s bok under senare år utbytt dennes framställning mot det sätt (något förenklat), som MOLL och med honom MALMBORG använder — direkt undersökning av bottentrycket i olika formade kärl — vilket är vida klarare och ej svårbegripligare. Men en dylik genomgripande ändring av lärobokens framställning gör man ej gärna. Den är både besvärlig och tidsödande.

De båda böckerna omfatta den kurs, som enligt den nya kursplanen för realskolan skall genomgås under fysikens första år, d. v. s. i den femåriga realskolans tredje klass (3^5) och den fyraårigas andra klass (2^4). Man har därför tillfogat ett par kapitel om magnetism och elektrostatik. Det senare kapitlet har hos H. fått en väl så stor bredd. Kunde ej t. ex. elektroforen ha slopats och spänningsbegreppet liksom i föregående upplagor sparats till elektrodynamiken — MALMBORG gör så —, där detta begrepp låter sig riktigare och lättare framställas för elever på detta åldersstadium? Att såsom nu skett i H:s bok förbinda begreppen negativ elektricitet och negativ potential, kommer säkerligen läsaren att tro, att det ena medför det andra och omvänt, vilket ju ingalunda är fallet. Framställes saken så, blir det nog kinkigt för läraren att besvara den frågan »Hur kan den här kroppen, som (genom influens) är negativt elektrisk i den ena ändan och positivt i den andra, ändock ha samma potential överallt?»

Elektrodynamiken komma förf. att behandla i en följande del omfattande den för realskolans klasser 3^4 och 4^5 föreskrivna kursen.

Så till slut några ord om de båda föreliggande böckerna ur speciellt realskolans synvinkel. De inledas liksom förut de äldre upplagorna med en kurs »mätningslära». Dessa kapitel kunna mycket väl tjäna såsom underlag för den laborationskurs, som upptagits på matematikens timplan i klasserna 1^4 och 2^5 (1 laborationstimme varje vecka under vårterminen). Enligt kursplanen skola dessa laborationer omfatta »instrument och metoder för längd-, volym- och viktsbestämning och i samband härmed bestämning av specifika vikter för fasta och flytande kroppar». Nu behandlas visserligen mätningsläran i de nyutgivna läroböckerna i matematik. Men vore det ej bättre att från början följa läroboken i fysik? Man kunde då — och tiden

medger det mycket väl — i dessa laborationer inrymma även de fysikaliska grunderna för vågen, d. v. s. hävstångslagen liksom även läran om kroppars tyngdpunkt, som ju intimt hör samman med matematiken. Detta innebure en stor fördel för fysiken. Under dess första år ha vi ju hittills — i den nuvarande fjärde klassen — haft 2 veckotimmar jämte en laborationstimme per vecka. Nu komma vi att få 3 veckotimmar, varav endast en laborationstimme *varannan* vecka. Hittills har mätningsläran ej tagit en hel termin i anspråk. Om man nu skulle ägna en hel termin åt densamma under matematiklaborationerna och därtill en vårtermin, komme eleverna att få avsevärt mindre tid till laborationer på kursens övriga delar än hittills. Detta vore beklagligt, ty var äro elevlaborationer till verklig nytta om ej just i denna klass?

Även för själva fysikkursens del är ett dylikt effektivt utnyttjande av matematiklaborationerna önskvärt. Visserligen medför den nya ordningen ett tillskott av $^1/_2$ demonstrationslektion per vecka. Men den behövs under nuvarande förhållanden mer än väl. Kursen är ju utökad med magnetism och elektrostatik, och så får man ej glömma, att man mer än hittills måste se till att få ett ordentligt kunskapsresultat i denna klass, detta med tanke på fysikens försvagade ställning på latingymnasiet och i realgymnasiets första ring.

C. E. Blom.

Meddelande om ny materiell, häft. 6. P. A. Norstedt & Söners Skolmateriellavdelning, Stockholm 1929, 40 sid., kr. 1: —.

Liksom föregående häften i denna serie har nu föreliggande ett synnerligen värdefullt innehåll. Intresset knyter sig särskilt till ett par uppsatser av lektor S. WESTLIN, Helsingfors, vilken beskriver två av honom konstruerade — och av firman saluförda — fallapparater, den ena en Atwoods fallmaskin med automatisk tidsreglering, den andra en apparat för undersökning av fri fallrörelse. Man torde med fog kunna säga, att den förra är den bästa och för skolbruk mest ändamålsenliga apparat av Atwoods typ, som hittills konstruerats. Anmälaren har åtminstone ej lärt känna någon bättre. Den bygger på den principen att vikterna få falla 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 sekunder. Fallet utlöses mekaniskt av en sekundpendel, som efter önskad tid automatiskt sätter i funktion en broms, som griper den löpande tråden och hejdar vikterna. På en skala avläses sedan den tillryggalagda vägen. Genom lämpliga anordningar kunna alla de vanliga fallförsöken utföras, snabbt och med stor noggrannhet, vilket anmälaren haft tillfälle att övertyga sig om.

Med den andra apparaten, även den av en mycket intressant konstruktion, visas att vägen (från 1 till 125 cm) är proportionell mot falltidens kvadrat — och bestämmes accelerationen vid fritt fall — mycket skarpt. Fallkroppen är en stålkula, som fasthålles av en elektromagnet. En horisontell skiva hålles i konstant rotation (1 varv/sek.) medelst en konisk pendel med stor massa. Ett stift vid skivans periferi slår an mot en från sidan inskjutbar hävstång, som bryter strömmen och utlöser kulan. Den faller mot en nål, som tränger in i och hejdar en presspanskiva, som ligger på och tack vare tillräcklig friktion följer den nyssnämnda skivan i dess rotation. Genom avläsning av bågen mellan stiftet och nedslagshålet bestämmes tiden med en noggrannhet av en eller högst ett par tusendels sekunder.

Lektor BJÖRKESON beskriver sin vackra apparatanordning för demonstration av longitudinell vågrörelse (se denna tidskrift årg. 12, sid. 138) och lektor RUDBERG en universalapparat för optiska försök i litet, bekvämt format, från firman Liesegang. Medelst denna utföras fotometriska mätningar, försök över ljusets reflexion, brytning och färgspridning, emissions- och absorptionsspektra, additiv och subtraktiv färgblandning, interferens med Fresnels spegel och dubbelprisma, Newtons färgringar, böjning, dubbelbrytning, polarisation etc.

Docent WETTERBLAD bidrager med ett par uppsatser. Den ena avhandlar en ny transformator från firman Brauns i Berlin (se annons i detta nummer, som även återger den nyssnämnda universalapp.), vars mångsidiga användbarhet förf. belyser. Lämpliga försök att med densamma demonstrera upp- och nedtransformering av växelström föreslås. Transformatorn kan lätt tagas isär och spolarna bytas eller användas separat. Med hjälp av en ring av lättsmält metall (dylika medfölja), som insättes som »sekundärspole», kan man visa principen för induktionssmältugnen.

I sin andra uppsats behandlar docent WETTERBLAD »Några synpunkter beträffande den experimentella behandlingen på skolstadiet av elektriska urladdningar i gaser». Huvudsyftet har här varit att träffa lämpligt val bland alla de otaliga apparater och anordningar, som skilda firmor ha att bjuda på. Resultatet har blivit en mycket god handledning över detta fängslande kapitel. Alltefter råd och lägenhet — och *tid* — kan man välja bland det rika materialet och tillgodogöra sig de många goda experimentella anvisningar förf. lämnar.

Lic CEDERSTRAND beskriver ett solarium av egen konstruktion, synbarligen avsedd att fylla den SOHLBERGska globens funktioner. Om den med fördel kan ersätta denna, synes

emellertid mycket tvivelaktigt, men anmälaren, som ej anser sig böra döma härom enbart på grundval av den meddelade beskrivningen, vill lämna den frågan öppen.

C. E. Blom.

GREGORI AMINOFF, *Om meteoriter* (Bonniers små handböcker i naturvetenskapliga ämnen 26). Stockholm 1929, Bonniers förlag, 129 sid., pris häft. kr. 3:75.

Den allmänhet, som hittills nöjt sig med att betrakta »stjärnfallen» som ett uteslutande estetiskt och något nyckfullt inslag i den nattliga landskapsbilden, får i prof. AMINOFFs arbete en god källa till verklig kunskap om dessa fenomen, d. v. s. den del av dem, som resultera i meteoritfall. För dessa till jorden nedfallna kroppar av kosmiskt ursprung ges en uttömmande beskrivning, gällande deras sammansättning ur kemisk och mineralogisk synpunkt, indelning form och storlek, deras geografiska fördelning och kosmiska roll. Ett särskilt kapitel ägnas den ryktbara meteoritkratern vid Canon Diablo i Arizona, som utöver redan bortförda 20 ton järnmeteoriter beräknas dölja en ännu icke anträffad om 120—150 m diameter. Ett annat kapitel ägnas åt meteoritfall i Skandinavien, och slutligen redogöres för de av Nordenskiöld 1871 hemförda grönländska järnblocken. Arbetet är innehållsrikt, välskrivet, rikt illustrerat med goda bilder och ett välkommet tillskott till vår populärvetenskapliga litteratur.

IWAN BOLIN, *Levande och död materia*. Stockholm, Tidens förlag, 106 sid., pris häft. kr. 1:50.

I detta arbete har den välkände författaren och föreläsaren samlat fem små uppsatser av spritt innehåll, som röra sig på gränsområdet mellan biologi och kemi och därmed motivera den valda titeln. Med utgångspunkt i Wöhlers urinämnesyntes (W. uppsökte Berzelius i Stockholm, ej i Uppsala!), som betecknar den första bryggan från »död» till »levande» materia, upprullas spridda bilder ur vår tids kemiska forskning, omfattande den moderna organiska syntesen, som onekligen alltjämt vinner lika imponerande resultat som någonsin förr, enzymer, vitaminer och hormoner fram till den något hårdragna analogien mellan oorganiskt-osmotiska och organismernas tillväxtfenomen. Med sin kåserande form, som, den anmärkningen måste vi tillåta oss, icke skulle ha förlorat på någon avslipning, är arbetet både innehållsrikt och roande.

Tidskrifter m. m.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska Kemistsamfundet Årg. XLI, 1929, häft. 9—10.

Ur innehållet i n:r 9. G. LJUNGGREN och R. ELMQVIST En enkel audionrörspotentiometer för pH-bestämningar. — R. THORAEUS, Radioaktiva fyndigheter och den nuvarande radiumproduktionen. — H. v. EULER und MARGARETA RYDBOM, Beobachtungen über A-Vitamine, Polyene und Ergosterylphosphorsäuren. — Referat och översikter. — N:r 10. K. JOSEPHSON, Bör undervisningen i organisk elementaranalys vid universitet och högskolor moderniseras? — H. EGNÉR, Kadmium som reduktionsmedel i den kemiska analysen. — Referat och översikter. — I båda numren: Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Vetenskapen och livet. Årg. XIV, 1929, häft. 9—10. Hugo Geber.

Ur innehållet i n:r 9. Stöten, ett mekaniskt fenomen. — Hastigheter i atomernas värld. — Television i färger. — Kristallernas natur. — N:r 10. Stjärnljuset, vart tar det vägen? — Den elektriska ugnen i den nutida industrien. — Den elektriska induktionen använd i generatorer och transformatorer. — Kristallernas natur. — Den lätta dieselmotorn.

Industritidningen Norden. Årg. 1929, häft. 37—47.

Ur innehållet. AGA-ljusets första kvartssekel. — Ny järnframställningsmetod. — LIONARDO DA VINCI som vetenskapsman och uppfinnare. — DE LAVALS industricentrifuger. — Helium i fast form. — Elektrolys av vatten under kompression, märkliga nya rön. — Teknik i fjärran Östern. — Tekniska Högskolans kemiska laboratorier. — Ventilation och ekonomi. — Chalmers Tekniska Institut och dess 100-årsjubileum (n:r 44 är ett Chalmersnummer). — Broar av armerad betong. — Den kemiska industrien, återblickar och framtidsförhoppningar. Ingenjörsvetenskapsakademien 1928—1929. — I alla nummer beskrivningar av nya patent och uppfinningar.

Era. Elektricitetens rationella användning. Årg. 1929, häft. 9, 10, 11.

Ur innehållet i n:r 9. Statiska kondensatorer för kompensation av magnetiseringsströmmen. — Från sommarens utställningar. — Populariserad statistik. — Gummi som isoler-

material för elektriska ledningar. — Ny armatur. — Ur n:r 10, som är ett mycket intressant och lärorikt EDISON-nummer. Hur glödlampan mottogs i Sverige. — Modern glödlampstillverkning, enligt uppgifter från Elektraverken. — Volfram som lystrådsmaterial. — Löpande ljusskrift. — Ett amerikanskt belysningsinstitut. — Ur n:r 11. F. V. HANSEN, minnesruna. — Bottenkraft för värmeändamål. — Vedlösa hus. — Kan glödlampors yttemperatur medföra brandfara?

Radioamatören. Årg. 6, häft. 10, 11. Göteborgs litografiska aktb.

Ur innehållet. Universalinstrument för rörprovning. — Automatisk indikering av nödsignaler. — Amatörsändarens strålningsstyrka i olika riktningar. — Kvartalsrevy över inhemsk och utländsk radiolitteratur. — Moderna storstationer för radiotelegrafering. — Frekvenskontroll med magnetostriktiva svängningar. — Uppställning av ramantenner inomhus.

Radio. Årg VII, häft. 14—19.

Ur innehållet. Från utställningar i Köpenhamn, London och Berlin. — Elektrisk inspelning av grammofonskivor. — Dimensionering av radiomottagare. — Ny tysk kortvågsändare. — D:r ALEXANDERSONs nya televisionsmottagare. — Rundradiostörningar och deras undanröjande. — Moderna växelströmsrör. — Nålföringen vid grammofoner. — Grammofonförstärkare. — Många nyheter och apparater avprovade vid Radios laboratorium.

Matematisk Tidsskrift. Udgivet af Matematisk Forening i København. Aarg. 1929, 3 Hefte.

Ur innehållet i avd. *A.* CARL VAN DEURS, Comes, studie over tidens definition. — G. M. STENSIG, Om en Centralellipse for en Trekant. — G. M. STENSIG, Et Udtryk for Eulers Konstant. — E. C. VALENTINER, Om en Trekants største indskrevne Ellipse. — Opgaver. — Ur avd. *B.* P. A. SCOTT-IVERSEN, Mekaniske Eksperimenter. — Litteraturanmeldelser.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Organ for Norsk Matematisk Forening. 11 Årg., 3 hefte.

Ur innehållet: CARL STØRMER, Abels opdagelser. — F. ENGEL, Sophus Lies samlede avhandlinger. — Bokanmeldelser. — Opgaver.

Kalendrar för 1930. Våra årligen utkommande kalendrar ha utvecklats till värdefulla uppslagsböcker med synnerligen aktuellt innehåll, som man kan ha god nytta av, ej minst för undervisningsändamål. Här nedan följer en översikt av innehållet i några av de nyutkomna kalendrarna med hänsyn till vad som särskilt kan intressera denna tidskrifts läsare.

Almanack för alla (P. A. Norstedt & Söner, 296 sid., kr. 2: 75): E. AHLBERG, Statistiska upplysningar om Sverige. — A. ROTH, Ljudfilmens debut. — CHR. SYLWAN, Femtio svenska uppfinnare. — J. NERÉN, Data ur automobilens historia. — J. A. SUNDIN, Svenskt på främarknaden.

Svenska kalendern (Almqvist och Wiksell, 282 sid., kr. 3: 75): Inledning om tidräkning, söndagsbokstaven, påsktabell, översikt av solsystemet, upplysningar om förmörkelser och planeters gång under 1930, om solens upp- och nedgång och om midsommardagens längd i olika delar av landet, var och när midnattsolen synes, normaltider. Utländska och inländska mått och vikter, kompassens missvisning under 1930—31. Svenska undervisningsanstalter. Förteckning över uppsatser i Svenska kalendern 1906—30.

Tidens kalender (Tidens förlag, 264 sid., kr. 2: 50): Inledning med upplysningar om solsystemet, förmörkelser, solens upp- och nedgång, samt midsommardagens längd på olika platser. — Statistiska upplysningar om vårt näringsliv. — T. OHDE, Den svenska pappersindustrien. — A. WALLÉN, Vädret. — I. BOLIN, Kommer solen att slockna? — S. O. VALENTINER, Världens pengar just nu, med illustrationer. — H. BÄCKSTRÖM, Min kamera. — E. HERLIN, Slagrutan förr och nu.

Hemmets årsbok (Åhlén & Holm, 244 sid., kr. 2: 50): Den svenska tändsticksindustrien och dess utveckling. — H. LUNDBERG, Från lågerelden till elektriska spisen. — V. A:SON LINDBERG, Bildtelegrafering.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

347) Lös ekvationen $x^5 + 5px^3 + 5p^2x + r = 0$.

C. A. Mebius.

348) P och P_1 äro ändpunkterna av en parameter i en ellips. Om den cirkel, som tangerar ellipsen P och P_1, går genom centrum, så innehålla normalerna i P och P_1 var sin av topparna på lillaxeln. *X.*

349) Konstruera de tangenter till cirkeln $x^2 + y^2 - 2ry = 0$, för vilka det mellan axlarna liggande stycket är så kort som möjligt. *X.*

350) Sök orten för skärningspunkterna mellan tangenterna från två fasta punkter till en cirkel, vars medelpunkt rör sig utefter punkternas föreningslinje och vars diameter är lika med avståndet mellan de båda nämnda fasta punkterna. *Iter.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.[2]

351) Lös ekvationen

$$1 + \sqrt{x - 2 - \sqrt{3x}} = \sqrt{x + 13}.$$

Svar: $x = 3468$.

352) Lös systemet

$$\frac{4}{x} - \frac{y}{\sqrt{5} - 1} = \sqrt{5}; \quad \frac{\sqrt{5} + 1}{x} - \frac{y}{2} = 2.$$

Svar: $x = y = \sqrt{5} - 1$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Red. tackar förbindligast de ärade läsare, som genom att insända uppgifter gjort det möjligt att redan nu påbörja den utvidgning av denna avdelning, som ställdes i utsikt i föregående nummer. För att kunna fortsätta på den inslagna vägen behöver emellertid red. ständigt ny tillförsel av uppgifter och får därför upprepa sin vördsamma anhållan till läsekretsen att genom bidrag göra denna avdelning intressant och innehållsrik. Uppgifterna behöva ej nödvändigt vara originella, varianter av kända typer äro även välkomna.

Uppgifterna n:r 357—372 i detta häfte äro insända av apotekare P. E. LUNDIN, Västervik.

353) I en likbent triangel med toppvinkeln $2x$ förenas de in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter med en av basens ändpunkter. Vinkeln mellan sammanbindningslinjerna kallas y. Undersök grafiskt y som funktion av x.

354) En liksidig triangels hörn ligga på tre parallella räta linjer. Den mellersta linjen befinner sig på avstånden a och b från de yttre linjerna. Angiv triangelns höjd som en funktion av a och b.

Svar: $\sqrt{a^2 + ab + b^2}$.

355) En cirkel skär cirkeln $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 5 = 0$ i ändpunkterna av en diameter, går genom punkten 6/1 och har sin medelpunkt på linjen $9x + 4y = 33$. Angiv ekvationen för den nämnda diametern.

Svar: $12x - 10y = 37$.

356) Beräkna kantvinklarna i en pyramid, vars höjd $= a$ och vars basyta är en likbent och rätvinklig triangel med hypotenusan $2a$. Höjden träffar basytan i hypotenusans mittpunkt.

Svar: 109°,48; 90°; 54°,74.

357) Lös ekvationen

$$x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Svar: $x_{1,\,2,\,3} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$; $x_{4,\,5,\,6} = -\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

358) Lös systemet

$$\begin{aligned} x + y - z &= 7 \\ x^2 + y^2 - z^2 &= 33 \\ x^3 + y^3 - z^3 &= 151 \end{aligned}$$

Svar:

x	5	3
y	3	5
z	1	1

359) I en månghörning är det tal, som anger vinklarnas summa, en enhet större än diagonalernas antal. Beräkna sidoantalet.

Svar: 361.

360) Lös ekvationen

$$5 \cot 5x = \cot x.$$

Svar: $\pm$ 52°,24 + $n \cdot 180°$; 90° + $n \cdot 180°$.

361) Lös ekvationen

$$\sin 2x \cdot \cos x + \sin x = 1.$$

Svar: 90° + $n \cdot 360°$; 21°,47 + $n \cdot 360°$; 158°,53 + $n \cdot 360°$.

362) Lös ekvationen

$$\sin x + \sin\left(45° + \frac{x}{2}\right) = 2.$$

Svar: 90° + $n \cdot 720°$.

363) I en rätvinklig triangel ABC tangerar en cirkel båda kateterna och skär hypotenusan BC i delarna BD, DE och EC, så att $BD : DE : EC = 8 : 24 : 1$. Beräkna triangelns minsta vinkel.

Svar: 31°,37.

364) I en rätvinklig triangel är skillnaden mellan kateterna 5 cm och höjden mot hypotenusan 12 cm. Beräkna hypotenusan.

Svar: 25 cm.

365) Från en punkt P på en cirkels periferi drages en linje PM vinkelrät mot en diameter AB. Var skall P ligga, för att triangeln APM skall bli så stor som möjligt?

Svar: $\sphericalangle PAM = 30°$.

366) OA och OB äro de en cirkelkvadrant begränsande radierna. I A är en tangent dragen. En rät linje tangerar bågen AB i P och skär OB:s förlängning i C och tangenten genom A i D. Bestäm förhållandet mellan PC och PD, då fyrhörningen $OADC$:s a) yta b) omkrets är den minsta möjliga.

Svar: a) $PC = PD$ b) $PD = 2PC$.

367) $ABCD$ är en rektangel, vars sidor AB och BC äro resp. 3 och 1 cm. Genom C är en rät linje dragen, som skär diagonalen BD i P och sidan AB i Q. Beräkna BQ, om summan av trianglarnas BPQ och CPD ytor är ett minimum.

Svar: $3(\sqrt{2} - 1)$ cm.

368) Två kubiska kärl rymma tillsammans 468 cm^3. Hur stora äro kanterna, då man vet, att dessa äro hela tal?

Svar: 5 och 7 cm.

369) Ett fyrsiffrigt tal är en jämn kvadrat. Om första siffran ökas med 2, den andra med 3, den tredje med 4, men den fjärde blir oförändrad, fås ett fyrsiffrigt tal, som också är en jämn kvadrat. Vilka äro talen?

Svar: 3136 och 5476 eller 1024 och 3364.

370) Om man ökar summan av ett helt positivt tal och dettas kvadrat med 61, så fås ett tal, som är jämn kvadrat. Beräkna talet. Svar: 4, 19 eller 60.

371) Vilket fyrsiffrigt, jämnt tal har den egenskapen, att $\frac{5}{7}$ av detsamma är lika med kvadraten på det tal, som bildas av de två sista siffrorna i talets hälft. Vilket är talet? Svar: 1260.

372) Ett tresiffrigt tal skrives i ett visst talsystem som 92 men som 644 i ett system, vars grundtal är 3 gånger så stort som det förras. Talets tiotalssiffra är 3 enheter större än dess enhetssiffra. Vilket är talet? Svar: 785.

Lösningar till uppg. 327—330.

327) *Visa, att*

$$n^6 + 3n^4 + 7n^2 - 11$$

är delbart med 128, om n är ett helt udda tal.

Uttrycket blir uppdelat

$$(n-1)\,(n+1)\,(n^4+4n^2+11)$$

och om n sättes $= 2p+1$ (p helt tal)

$$2p\,(2p+2)\,(16p^4+32p^3+40p^2+24p+16) =$$
$$= 32p\,(p+1)\,(2p^4+4p^3+5p^2+3p+2).$$

Här är faktorgruppen $p(p+1)$ ett jämnt tal, likaså sista faktorn, enär termgruppen $5p^2+3p = p(5p+3)$ tydligen är ett jämnt tal, vare sig p är udda eller jämn. Uttrycket är således delbart med 128. *B—r.*

Även löst av *A. A., E. R., N. Löfgren* och *A. N. Zahl.*

328) *Visa, att ett uddasiffrigt tal, vars första siffra är 1 eller 8 och vars alla följande siffror äro treor, icke kan vara ett primtal.* *Iter.*

De båda talgrupperna äro av formen:

$$33 + 10^2\cdot 33 + 10^4\cdot 33 + \ldots + 10^{2n}\cdot 33 + 10^{2n+2}$$
$$33 + 10^2\cdot 33 + 10^4\cdot 33 + \ldots + 10^{2n}\cdot 33 + 8\cdot 10^{2n+2}$$

och bli efter summering av serierna

$$\frac{33(10^{2n+2}-1)}{99} + 10^{2n+2} = \frac{4\cdot 10^{2n+2}-1}{3} = \frac{(2\cdot 10^{n+1}+1)(2\cdot 10^{n+1}-1)}{3}$$

$$\frac{33(10^{2n+2}-1)}{99} + 8\cdot 10^{2n+2} = \frac{25\cdot 10^{2n+2}-1}{3} = \frac{(5\cdot 10^{n+1}+1)(5\cdot 10^{n+1}-1)}{3}.$$

Talen kunna således uppdelas i de tydligen heltaliga faktorerna $\frac{2\cdot 10^{n+1}+1}{3}$ och $2\cdot 10^{n+1}-1$, resp. $\frac{5\cdot 10^{n+1}+1}{3}$ och $5\cdot 10^{n+1}-1$; de äro således ej primtal. V. S. B.

Anm. Beviset kan föras på liknande sätt för följande likartade talgrupper (utom sådana, som äro delbara enligt elementära regler):

De som börja med siffran 5, följd av ett jämnt antal treor
» » » » » 7, » » » » » ettor
» » » » » 8, » » » » » nior

(Jfr uppg. 182 i årg. 1924—1925, häft. 3) *B—r.*

Även löst av *E. R., N. Löfgren* och *A. N. Zahl.*

329) *m och n äro två hela positiva tal, $m > n$. När finnes en rätvinklig triangel och en tillhörande aritmetisk serie sådan, att triangelns kateter och hypotenusa mätas av resp. s_m, s_n och s_{m-n} i serien?* ($s_r = \sum_1^r u_r$, *om serien är* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$) X.

Enär $s_m < s_{m-n}$, är differensen negativ. Vi sätta den $= -2$, d. v. s. utvälja en triangel ur varje grupp av sinsemellan likformiga sådana. Sidorna bli då $m(a-m+1)$; $n(a-n+1)$

och $(m - n)(a - m + n + 1)$ och PYTHAGORAS' sats ger en andragradsekvation i a:

$$m^2(a - m + 1)^2 + n^2(a - n + 1)^2 = (m - n)^2(a - m + n + 1)^2.$$

En rot är tydligen $a_1 = m - 1$, som emellertid gör ena kateten $= 0$. Hyfsning ger:

$$2mna^2 - 2a(3m^2n - 3mn^2 + 2n^3 - 2mn) + \ldots$$

och den andra roten a_2 fås då ur

$$a_1 + a_2 = 3m - 3n + \frac{2n^2}{m} - 2,$$

som ger

$$a_2 = 2m - 3n + \frac{2n^2}{m} - 1.$$

Sidorna få efter insättning av a_2 värdena:

$$(m - n)(m - 2n);\ \frac{2n}{m}(m - n)^2 \text{ och } \frac{m - n}{m}(m^2 - 2mn + 2n^2).$$

Tillräckligt och nödvändigt villkor för triangelns existens blir då, att alla sidor äro > 0, d. v. s. att $m > 2n$.

Sidorna förhålla sig då som talen $m(m - 2n)$, $2n(m - n)$ och $m^2 - 2mn + 2n^2$. Sätter man här $n + p$ i stället för m, får man talen $p^2 - n^2$, $2pn$ och $p^2 + n^2$, d. v. s. man kan få alla rationella trianglar. *B—r.*

Även löst av *E. R.*

330) *Att konstruera en triangel, då man känner längden av en sida, läget av de höjders fotpunkter, vilka fällas mot de två andra sidorna samt vet, att den tredje höjdens fotpunkt ligger på en given obegränsad rät linje.* *C. A. Mebius.*

Givna äro: punkterna A och B, en sträcka m och en rät linje L.

Det begäres att konstruera en triangel, där en sida är $= m$, där motsvarande höjds fotpunkt ligger på L och där de övriga höjdernas fotpunkter äro A och B.

Lösning: Konstruera en cirkel C_1 genom A och B och med diametern $= m$ (AB antages $< m$). Den sökta triangelns sida med längden m måste tydligen vara diameter i C_1, enär den skall synas under rät vinkel från både A och B. Dess mittpunkt är alltså C_1:s centrum O. Konstruera en cirkel C_2 genom A, B och O; den blir då den till den sökta triangeln hörande FEUERBACHska cirkeln. Om nu C_2 skär L i P, drages i C_1 en diameter QR genom P. Linjerna AQ och BR råkas i S_1 och linjerna AR och BQ i S_2. Trianglarna QRS_1 och QRS_2 uppfylla då de önskade villkoren.

Allteftersom C_2 skär, tangerar eller ej råkar L, får man alltså fyra, två eller inga lösningar. *B—r.*

Även löst av *E. R.* och *N. Löfgren.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna H. T. 1929.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. En likbent triangel ABC har spetsen A och basen BC. Hur stor bör vinkeln A vara, om en cirkel, som tangerar sidorna AB och AC i D och E, så att $AD = 2\,DB$, har sin medelpunkt på basen?
2. Vilket värde skall r ha i ekvationen

$$x^2 + 7x + r = 0,$$

för att summan av kuberna på ekvationens rötter skall vara 77?

3. Då en fastighet skulle säljas, inlämnade A och B var sitt köpeanbud. A erbjöd sig att den 1 januari 1929 erlägga 12 000 kr. kontant samt att sedan varje 1 januari under 10 år betala 5 000 kr. B var villig att den 1 januari 1929 betala 20 000 kr. kontant och att sedan varje 1 januari under 5 år erlägga 7 000 kr. Hur mycket voro dessa anbud värda den 1 januari 1929, om säljaren kan beräkna 5 % ränta på ränta?
4. I en rät cirkulär kon, vars höjd är 5 dm, förhåller sig basytan till mantelytan som 3 till 8. Beräkna konens volym.
5. I den givna triangeln ABC är sidan AB större än sidan BC. På AB tages punkten E mellan A och B. Sidan BC utdrages åt C till ett stycke $CD = AE$. Var på AB skall punkten E väljas, för att ytan av triangeln BDE skall bli så stor som möjligt?
6. Beräkna x och y ur ekvationssystemet

$$^x\log 2 + {}^y\log 4 = -4,$$

$$^x\log 8 + {}^y\log 16 = -6.$$

7. För en given triangel ABC har man relationerna

$$\frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{5} = \frac{a+b}{6}$$

mellan sidorna a, b och c, varvid a är den sida, som står emot vinkeln A, o. s. v. Beräkna (utan användning av trigonometrisk tabell) sinus för triangelns vinklar.

8. Två koncentriska cirklar med medelpunkten O samt radierna r och R äro givna. Från en yttre punkt P dragas tangenterna till de båda cirklarna. Hur stort skall avståndet OP vara (uttryckt i r och R), för att sammanbindningslinjen mellan en av tangeringspunkterna på den inre cirkeln och en av tangeringspunkterna på den yttre cirkeln skall vara parallell med OP? Hur stora bli då avstånden från en tangeringspunkt på den inre cirkeln till de båda tangeringspunkterna på den yttre cirkeln?

Resultat: **1.** $70^\circ,53$. **2.** $r = 20$. **3.** A:s anbud var värt ungefär 50 600 kr., B:s ungefär 50 300 kr. (50 610 och 50 310 kr). **4.** $\frac{75\pi}{11} = 21{,}42$ dm^3. **5.** Punkten E skall väljas så, att $BD = BE = \frac{AB + BC}{2}$. **6.** $x = \sqrt{2}$; $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **7.** $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $\sin C = \frac{3\sqrt{3}}{14}$. **8.** $OP = \sqrt{R^2 + r^2}$; de sökta avstånden mellan tangeringspunkterna äro $\sqrt{R^2 + r^2}$ och $\frac{R^2 - r^2}{\sqrt{R^2 + r^2}}$. — Upprita en cirkel med OP som diameter!

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. Visa, att de båda tangenterna till ellipsen
$$\frac{x^2}{1{,}5} + \frac{y^2}{0{,}5} = 1,$$
som gå genom punkten (1,1), äro mot varandra vinkelräta.
2. Ett klot, vars radie är R, skäres med ett plan. I skärningscirkeln inskrives en regelbunden sexhörning. Sexhörningen är bas i en pyramid, vars topp ligger på klotets yta och så, att höjden från toppen mot basen råkar denna i sexhörningens medelpunkt. Hur stort skall planets avstånd från klotets medelpunkt vara, för att pyramidens volym skall bliva så stor som möjligt?
3. Mellan vilka gränser ligger kvoten till en oändlig, avtagande geometrisk serie, om första termen är större än seriens halva summa och skillnaden mellan första och andra termen är mindre än tredjedelen av seriens summa?
4. Bestäm alla vinklar x, som satisfiera ekvationen
$$3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x - 3 \operatorname{cot} x = 0.$$

5. I en punkt på parabeln
$$y^2 = 2px$$
dragas tangenten och normalen. De råka parabelns axel i T resp. N. På tangenten tages punkten Q så, att $NQ = NT$. Sök orten för mittpunkten på sträckan NQ.
6. I en triangel är en vinkel 60°, denna vinkels bissektris 2 dm och radien i den kring triangeln omskrivna cirkeln 2 dm. Beräkna triangelns sidor och vinklar.
7. Om konstanterna a och b i polynomen
$$x^3 - 7x^2 + ax + 2a + 1, \quad x^2 + bx - 3$$
väljas lämpligt, blir det första polynomet jämnt delbart med det andra. Bestäm de värden på a och b, för vilka detta inträffar, samt rötterna till de ekvationer, som erhållas, då de båda polynomen (med ifrågavarande värden å a och b) sättas lika med noll.
8. Ett klot och en kub ha samma medelpunkt. Hälften av klotets yta är utanför kuben. Hur stor del av klotets volym befinner sig utanför kuben?
9. För ett parallelltrapets känner man alla vinklarna, summan a av de båda parallella sidorna samt summan b av de båda icke parallella sidorna. Konstruera trapetset.

Resultat: **1.** Beteckna tangenternas vinkelkoeff. med k (k_1 och k_2 resp.), så erhålles $k^2 + 4k - 1 = 0$, varav $k_1 k_2 = -1$. **2.** $\frac{R}{3}$. Samma resultat erhålles, om uppgiftens »regelbunden sexhörning» generaliseras till »månghörning, likformig med en given inskrivbar månghörning» och »sexhörningens medelpunkt» utbytes mot »skärningscirkelns medelpunkt». **3.** Första termen måste vara positiv och $\frac{1}{2} > k > \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$, om k är seriens kvot. **4.** $\pm 30° + n \cdot 90°$. **5.** Parabeln $y^2 = p\left(x - \frac{p}{2}\right)$. **6.** Vinklarna äro 96°, 60° och 24°; sidorna i ordning 3,978 dm ($= 4 \sin 96°$), 3,464 dm ($= 2\sqrt{3}$) och 1,627 dm ($= 4 \sin 24°$). *Ledning:* I. Låt bissektrisen ($= s$) till vinkeln C ($= 60°$) skära sidan AB i D och, utdragen, den omskrivna cirkeln (medelpunkt i O, radie $= R$) i F. Diametern FG skär AB i H ($HF = R : 2$); drag GC. Ur likformiga trianglar — eller lägg en cirkel genom C, D, H och G och tillämpa kordsatsen — finner man $FD = \frac{1}{2}(\sqrt{s^2 + 4R^2} - s)$. Härav $\cos F = R : (\sqrt{s^2 + 4R^2} - s)$, som får värdet $(\sqrt{5} + 1) : 4$ för $s = R$, d. v. s. $F = 36°$ o. s. v. II. I det föreliggande speciella

fallet ($s = R$) kunna vinklarna bestämmas rent geometriskt. Man drar OC och OD och observerar, att $OH = HF = R : 2$ ($\because \angle ODH = \angle FDH$) samt att trianglarna COF och COD äro likbenta, vilket ger, att vinklarna i den senare äro 72°, 72° och 36° o. s. v. **7.** Två värdepar a och b finnas. Antingen $a = 7$ och $b = -2$, då den första ekvationens rötter äro 5; 3; — 1 och den andras 3; — 1. Eller $a = \frac{1}{4}$ och $b = -6\frac{1}{2}$, då den förras rötter äro $\frac{1}{2}$; $\frac{13 \pm \sqrt{217}}{4}$ och den senares $\frac{13 \pm \sqrt{217}}{4}$. **8.** $\frac{17}{144}$.

9. Sammanbind de icke parallella sidornas mittpunkter.

Uppgifter i fysik.

1. En projektil avskjutes från en punkt A och inträffar i en annan punkt B samtidigt med ljudet av skottet. Punkterna A och B äro belägna i samma horisontalplan på 4080 m avstånd från varandra. Beräkna projektilens högsta höjd över horisontalplanet. Ljudets fortplantningshastighet i luft är 340 m/sek. Accelerationen vid fritt fall är 982 cm/sek^2.
2. Bunsens iskalorimeter är så inrättad, att man kan mäta den volymsförändring, som inträffar, då värme tillföres en i apparaten innesluten blandning av is och vatten, vilken blandning under hela försöket har en temperatur av 0° C. Vid ett försök att bestämma specifika värmet hos en metall infördes i en sådan apparat 0,96 gr av metallen. Metallstyckets begynnelsetemperatur var 99°,5 C, och det avkyldes till 0° C, varvid den avgivna värmemängden antages helt och hållet hava åtgått till att smälta en del av isen. Den sammanlagda volymen av is och vatten ändrades vid försöket med 8,3 mm^3. Isens smältvärme är 80, och dess specifika vikt vid 0° C är 0,9168. Vattnets specifika vikt vid 0° C är 0,9999. Beräkna metallens specifika värme.
3. Ett kärl innehåller 1 m^3 luft, som är mättad med vattenånga och vars temperatur är 20° C. Luftmassan sammanpressas, så att dess volym blir hälften av den ursprungliga, och samtidigt sänkes dess temperatur till 10° C. Huru mycket väger det vatten, som därvid kondenseras? En liter torr luft väger vid 0° C och 760 mm tryck 1,293 gr. Specifika vikten av vattenånga är $\frac{5}{8}$ av luftens specifika vikt vid samma temperatur och tryck. Trycket av mättad vattenånga är vid 20° C 17,5 mm och vid 10° C 9,2 mm. Gasernas utvidgningskoefficient är $\frac{1}{273}$.
4. En kikare inställes, så att man i den tydligt ser ett mycket avlägset föremål. Tätt framför objektivet placeras en tunn

positiv lins, så att dess optiska huvudaxel sammanfaller med kikarens. För att man då skall tydligt kunna se samma avlägsna föremål, måste okularet skjutas in 2 cm. Vid de båda observationerna är ögat inställt på samma sätt. Sök linsens fokaldistans, då objektivets är 40 cm.

5. Två identiskt lika halvsfärer av glas placeras så, att de plana ytorna bliva vertikala, parallella och vända mot varandra. Den räta linje, som sammanbinder de båda medelpunkterna, är horisontell. Parallellt med och nära intill denna linje, vilken betraktas som det optiska systemets huvudaxel, infaller ett smalt knippe sinsemellan parallella strålar mot den ena buktiga ytan. Sedan ljusstrålarna passerat de båda halvsfärerna, äro de fortfarande parallella med huvudaxeln. Beräkna avståndet mellan de båda plana ytorna, då sfärernas radie är 10 cm och brytningsexponenten för glas är 1,5.
6. Ett ackumulatorbatteri med 60 seriekopplade celler laddas från ett ledningsnät med 240 volts spänning. Varje cell har 0,01 ohms inre motstånd. Den elektromotoriska kraften hos varje cell växer under laddningens gång och utgör vid laddningens början 2,0 volt för att vid slutet av laddningen uppgå till 2,6 volt. Laddningen skall verkställas med 15 ampères strömstyrka. Strömstyrkan regleras med tillhjälp av ett variabelt motstånd, som är kopplat i serie med batteriet. Inom vilka gränser bör detta motstånd kunna varieras?
7. En likströmsgenerator och ett ackumulatorbatteri äro så sammankopplade, att generatorns positiva pol A förbindes med batteriets positiva pol A_1 och generatorns negativa pol B med batteriets negativa pol B_1. Mellan generatorns poler A och B finnes dessutom en med batteriet parallellkopplad ledning med 10 ohms motstånd. Generatorns elektromotoriska kraft är 120 volt, batteriets 116 volt. Generatorns inre motstånd är 0,2 ohm. Motståndet hos kablarna AA_1 och BB_1 utgör tillsammans med batteriets inre motstånd 0,5 ohm. Beräkna styrkan och riktningen av den ström, som går genom batteriet.
8. Redogör för någon metod att bestämma tyngdkraftens acceleration.

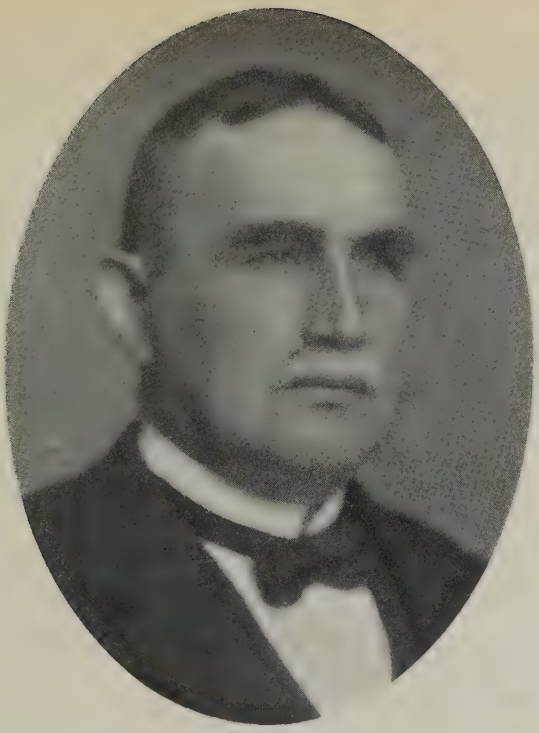
Resultat: **1.** $18 \cdot 9{,}82 = 176{,}8$ m. **2.** 0,0767. **3.** 12,62 g. **4.** 760 cm. **5.** $26\frac{2}{3}$ cm. **6.** Mellan 7,4 och 5 ohm. **7.** 2,37 amp. $(= 2\frac{26}{71})$; från A_1 till B_1.

Realskolexamen H. T. 1929.

Provräkning.

1. Lös ekvationen
$$\frac{7 - 5x}{2{,}2} - \frac{3x - 0{,}4}{0{,}25} = \frac{10x - 1}{2} - 0{,}5.$$
2. Ett gatuarbete beräknades kunna utföras av 20 yrkeskunniga arbetare på 25 dagar. I verkligheten anställdes blott 10 yrkeskunniga män och 10 andra, vilkas arbetshastighet endast var $^2/_3$ av de yrkeskunnigas. Hur mycket bör arbetet härigenom försenas?
3. Två cirklar hava vardera en radie av 5 cm. Avståndet mellan medelpunkterna är 14 cm. Beräkna radien i den cirkel, som tangerar såväl båda cirklarna som den räta linje, vilken förenar medelpunkterna.
4. En person köper 200 meter koppartråd av tjockleken 0,6 mm. Hur mycket skall han betala, om 1 cm^3 koppar väger 8,9 gram och 1 hektogram av tråden kostar 35 öre? ($\pi = 3{,}14$.)
5. En vedhandlare köper mot kontant betalning 500 kbm ved till ett pris 7 kr. 50 öre pr kbm. Som han emellertid ej kan åstadkomma hela köpesumman genast, lämnar han säljaren en 4 månaders växel på 3 000 kr. samt resten kontant. Hur mycket skall han betala kontant, om växeln kan diskonteras efter 6,5 proc.?
6. Då ett fartyg befinner sig 9 mil från land, får det en läcka, som insläpper 5 ton vatten i minuten. För att komma fartyget att sjunka äro 900 ton tillräckliga. Fartygets pumpar bortskaffa 180 ton vatten i timmen. Hur stor hastighet bör fartyget ha för att nå land, just som det börjar att sjunka?
7. Med vilken hastighet, uttryckt i meter pr sekund, rör sig på grund av jordrotationen en ort, som ligger på 60° sydlig bredd? Jorden antages vara ett klot med radien 6 377 km. ($\pi = 3^1/_7$.)
8. I en triangel ABC är höjden AD mot sidan BC 4,5 cm och höjden BE mot sidan AC 4,3 cm. Vinkeln BCA är 30°. Beräkna triangelns yta och sidor.

Resultat: **1.** $x = 0{,}3$. **2.** 5 dagar. **3.** 2,4 cm. **4.** 1 kr. 76 öre. **5.** 815 kr. **6.** 12 km/tim. **7.** 232 m/sek. **8.** Ytan är 19,35 cm^2; $AB = 4{,}6$ cm, $BC = 8{,}6$ cm, $AC = 9$ cm.



ANDERS WIMAN.

Anders Wiman.

Professor ANDERS WIMAN fyllde 65 år den 11 februari d. å. och avgick då från den professur i matematik vid Uppsala Universitet, som han i nära 30 år innehaft. Därmed avslutades en långvarig verksamhet i den akademiska undervisningens tjänst, djupt betydelsefull för den matematiska vetenskapens utveckling i vårt land men också för våra läroverk, som fått mottaga en stor del av den talrika skara lärjungar, som han förmått samla kring sig och intressera för sin vetenskap.

Att teckna dens vetenskapliga gärning, som ännu med obrutna krafter står mitt uppe i densamma är ju ej lämpligt. Men vi kunna icke neka oss att med anledning av högtids-

dagen erinra om professor WIMANS stora insats och citera därför med benäget tillstånd ur Svenska Dagbladet ($^{10}/_{2}$ 1930), där en representant för »många lärjungar» skriver:

»Om det starka och allmänna intresse för den matematiska vetenskapen, som han förmått uppväcka hos sina lärjungar, vittna de talrika avhandlingar, som under hans tid framkommit i Uppsala. Dessa lämna också ett tydligt vittnesbörd om den mångsidighet, som präglat hans undervisning. Den moderna funktionsteorien, som befann sig under utveckling, då han tillträdde sin professur, har under hans tid nått en framskjuten ställning i Uppsala. I lika grad gäller detta även andra grenar av den matematiska vetenskapen: geometrien, talteorien, algebran och gruppteorien ha i Uppsala haft en hemvist under en tid, då de mångenstädes ringa beaktats. Denna i vår tid nära nog enastående mångsidighet sammanhänger intimt med professor WIMANS egen vetenskapliga produktion. På dessa vitt skilda områden har han gjort betydande, av den internationella vetenskapen högt skattade insatser. — —»

»Professor WIMANS förmåga att intressera elever för sin vetenskap, hans personliga välvilja och uppmuntrande intresse samt hans betydande vetenskapliga pondus ha hos hans lärjungar kvarlämnat ett starkt och levande intryck. De känna livligt den förlust, som den akademiska undervisningen gör vid hans avgång och måste finna den fatala 65-årsgränsen i detta fall alldeles särskilt godtycklig. Å andra sidan bringar ju sextiofemårsdagen en professor, som helt går upp i sin vetenskap, en från de betungande ämbetsplikterna ostörd arbetsro. När sålunda professor WIMANS lärjungar och vänner på hans sextiofemårsdag bringa honom sin hyllning, sker det med en tillönskan om många ostörda arbetsår.»

En särskilt betydelsefull hyllning bragtes professor WIMAN med den festskrift, som tillägnats honom av kolleger och lärjungar: *Opuscula Mathematica Andreæ Wiman dedicata.* Den innehåller femton avhandlingar berörande skilda områden av matematiken. Påfallande talrika äro de geometriska undersökningarna: inte mindre än sex avhandlingar äro

ägnade geometrien. De övriga arbetena röra algebra och talteori, funktionsteori samt den matematiska fysiken, som är representerad med tvenne undersökningar över differentialekvationer inom hydrodynamiken. De olika bidragen framgå av nedanstående innehållsförteckning.

Festskriften prydes av professor Wimans porträtt och en bild av den byggnad, som inrymmer det Matematiska Seminariet i Uppsala, och bringar därmed i erinran, hur detta under professor Wimans tid utvecklats till en betydelsefull institution för de matematiska vetenskaperna med ett särdeles förnämligt matematiskt bibliotek.

Opuscula Mathematica Andreæ Wiman dedicata, Festskrift tillägnad Anders Wiman, Lundequistska Bokhandeln, Uppsala, 195 p., kr. 13: 50.

Innehåll: G. Valiron: Sur un théorème de M. Wiman. O. Stenström: Perspektive Tetraeder und die kubische Fläche. Eine Analogie des Pascalschen Satzes. H. Bohr: Über ganze transzendente Funktionen, die auf jeder durch den Nullpunkt gehenden Geraden beschränkt sind. P. G. Persson: Kongruenta avbildningar, likriktade trekanter och Legendres satser om triangelns vinkelsumma. Th. Skolem: Lösung der Gleichung $f(x,y) = o$ in ganzen Zahlen x und y mit beschränktem, gemeinsamem Teiler, wenn das Konstantglied fehlt. M. Ålander: Sur les dérivées successives des fonctions régulières. S. Wigert: Deux notes d'Arithmétique. C. Juel: Streubemerkungen über die reingeometrischen und die analytisch-geometrischen Methoden. G. Bolinder: Om bicentriska fyrhörningar och deras invarianter. C. W. Oseen: Exakte Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen. P. Heegaard: Eine räumliche Erweiterung der Lieschen Darstellung von den imaginären Elementen der Ebene. F. Carlson: Sur quelques fractions continues. J. Hjelmslev: Die geometrischen Konstruktionen mittels Lineals und Eichmasses. T. Carleman: Sur la fonction $\mu(\sigma)$ de M. Lindelöf. H. Faxén: Ein hydrodynamisches Problem.

Generaliseringar av medianer och bissektriser i trianglar.

Av FRANS DE BRUN.

Utan att ingå på detaljer tillåter jag mig att framhålla, att det centrala i matematikundervisningen icke bör vara bibringandet av speciella kunskaper utan av metoden för vetenskaplig forskning. Redan på ett tidigt stadium böra eleverna vänjas vid att arbeta självständigt. All forskning går från det enskilda till det allmänna, och det torde därför vara av vikt att fästa uppmärksamheten på generaliseringarna. Det behöver inte alls vara några konstiga saker, även de allra enklaste kunna göra sin nytta härvidlag. Som ett exempel vill jag nämna nedanstående, som naturligtvis i sig självt saknar betydelse. Samtidigt vill jag lägga matematiklärarna på hjärtat att inte dröja så länge med införandet av de vanliga symbolerna, indices, summationstecken o. dyl. Erinrar i sammanhang härmed om de berömda orden: indiceringen är en av den germanska rasens skönaste uppfinningar.

I $\triangle ABC$ beteckna a, b, c som vanligt de mot vinklarna A, B, C resp. stående sidorna. Om den från C dragna medianen $CP\,(=x)$ gäller som bekant

$$x^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Då blir frågan: huru generaliseras denna sats, om man i stället för att dela basen c mitt itu, delar den i n lika delar? Låt delningspunkterna, från B räknat, vara i ordning P_1, P_2, ... P_{n-1}. Vi sammanbinda dem med C och beteckna

$$CP_i = x_i \,(x_0 = a,\ x_n = b).$$

Då gäller enl. (1):

$$x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 = 2x_i^2 + 2\left(\frac{c}{n}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$(i = 1, 2, \ldots n-1).$$

Lösningen till detta lineära ekvationssystem får formen

$$x_i^2 = A(i, n)\,a^2 + B(i, n)\,b^2 + C(i, n)\,c^2,$$

där A, B, C endast bero av i och n. Vi summera och få

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = a^2 \sum_{i=1}^{n-1} A(i, n) + b^2 \sum_{i=1}^{n-1} B(i, n) + c^2 \sum_{i=1}^{n-1} C(i, n).$$

Eftersom summan är oföränderlig om a och b byta plats, måste koefficienterna för a^2 och b^2 vara lika. Alltså:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = A(n) \cdot (a^2 + b^2) + C(n)\,c^2, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

där A och C endast bero av n. De kunna lätt fås genom följande betraktelsesätt. Vi tänka oss, att $\triangle ABC$ får allt mindre höjd, och att C närmar sig till B. I själva gränsfallet blir

$$a = 0, \; b = c, \; x_i = \frac{ic}{n} \; (i = 1, 2, \ldots n-1).$$

Införas dessa värden i (3), få vi efter division med c^2

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = A(n) + C(n). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Om vi nu låta $\triangle ABC$ minska i höjd så, att C går mot P_1, få vi gränsfallet

$$a = \frac{c}{n}, \; x_1 = 0, \; x_i = \frac{i-1}{n}\,c \; (i = 2, \ldots n-1), \; b = \frac{n-1}{n}\,c,$$

vilka insatta i (3) giva

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} (i-1)^2 = A(n)\left(\frac{1}{n^2} + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) + C(n). \quad . \quad . \quad (5)$$

Av (4) och (5) erhålles efter subtraktion:

$$A(n) = \frac{n-1}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

som insatt i (4) ger generaliseringen av (1):

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 =$$
$$= \frac{n-1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{(n-1)\,n(n+1)}{6}\left(\frac{c}{n}\right)^2 . \quad . \quad . \quad (7)$$

Efter division med $n-1$ erhålles aritmetiska mediet av kvadraterna

$$m_{n-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}{n-1} = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{6} - \frac{c^2}{6n} .$$

Låta vi n gå mot ∞, blir i limes

$$m_\infty^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{6} .$$

Vill man jämföra m_{n-1} med x, behöver man endast eliminera $a^2 + b^2$ medelst (1), varav

$$m_{n-1}^2 = x^2 + \frac{c^2}{12} - \frac{c^2}{6n}, \quad m_\infty^2 = x^2 + \frac{c^2}{12} .$$

För det fall, att $\measuredangle C = \frac{\pi}{2}$, får man

$$m_{n-1}^2 = \frac{c^2}{3} - \frac{c^2}{6n}, \quad m_\infty = \frac{c}{\sqrt{3}} .$$

Man kan också tänka sig generaliseringen på annat sätt. Om vi i stället för att dela basen c i n lika delar taga en godtycklig punkt på den, P, och sammanbinda med C samt beteckna CP med x, dess projektion på c med p och styckena BP med c_1, PA med c_2, få vi

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= x^2 + c_1^2 \mp 2c_1 p \\ b^2 &= x^2 + c_2^2 \pm 2c_2 p \end{aligned}\right\} ,$$

där de övre tecknen gälla samtidigt, de undre samtidigt. Efter eliminering av p:

$$\frac{c_2}{c} a^2 + \frac{c_1}{c} b^2 = c_1 c_2 + x^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Denna formel ger oss i ett slag de $n-1$ linjerna CP_i i föregående uppgift. Här äro

$$c_1 = \frac{ic}{n}, \quad c_2 = \frac{(n-i)c}{n}.$$

$$\therefore x_i^2 + \frac{i(n-i)}{n^2}c^2 = \frac{n-i}{n}a^2 + \frac{i}{n}b^2. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Genom att här summera från $i=1$ till $i=n-1$ fås (7) genom annan härledning.

Formeln (8) kan även användas för att giva triangelns höjd; man behöver bara först räkna ut c_1 och c_2, vilket lätt göres medelst pythagoreiska satsen. Likaså kan man därav få bissektrisen x till $\sphericalangle C$. Då sättas

$$c_1 = \frac{a}{a+b}c, \quad c_2 = \frac{b}{a+b}c.$$

$$\therefore x^2 + \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab.$$

Naturligtvis kunna också bissektrissatserna generaliseras. För bissektriserna x gälla, om $\theta = \frac{1}{2}\sphericalangle BCA$,

$$x = \frac{2ab\cos\theta}{a+b},$$

eller om de inversa värdena till x, a, b betecknas med resp. ξ, α, β:

$$\alpha + \beta = 2\xi\cos\theta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Antag nu, att $P_i (i = 1, 2, \ldots n-1)$ äro de punkter, vari de $n-1$ linjerna CP_i, som dela vinkeln C i n lika delar, var och en lika med θ, träffa AB. Om vi då kalla BP_1 för $\mu a x_1$, finna vi omedelbart

$$P_iP_{i+1} = \mu x_i x_{i+1} (i = 1, 2, \ldots n-1, x_n = b).$$

Eftersom CP_i är bissektris till $\sphericalangle P_{i-1}CP_{i+1}$, gäller då på grund av (10), att

$$\xi_{i-1} + \xi_{i+1} = 2\xi_i\cos\theta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

om vi med ξ_j beteckna inversa värdet till x_j. Vidare få vi av

$$x_{i-1}x_{i+1} = x_i^2 + \mu^2 x_{i-1}x_i^2 x_{i+1}$$

efter division med $x_{i-1}x_i^2x_{i+1}$:

$$\mu^2 = \xi_i^2 - \xi_{i-1}\xi_{i+1}. \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Ekvationssystemet (11) är lätt att lösa i varje särskilt fall, och av (12) får man sedan μ, varigenom alla förekommande sträckor äro bestämda. Av (11) fås

$$\sum_{i=1}^{n-1}{}' (\xi_{i-1} + \xi_{i+1}) = 2\cos\theta \cdot \sum_{i=1}^{n-1}{}' \xi_i.$$

$$\therefore\ 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1}{}' \xi_i = \xi_1 + \xi_{n-1} - (\alpha + \beta) + 2\cos\theta \cdot \sum_{i=1}^{n-1}{}' \xi_i. \quad (13)$$

Om vi nu beteckna bissektrisen till $\sphericalangle C (= n\theta)$ med $\frac{1}{\eta}$, fås:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2\eta\cos\frac{n\theta}{2} \\ \xi_1 + \xi_{n-1} &= 2\eta\cos\left(\frac{n\theta}{2} - \theta\right) \end{aligned}\right\},$$

som insatta i (13) giva

$$\sum_{i=1}^{n-1}{}' \xi_i = \frac{\alpha + \beta}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}} \cdot \sin\frac{n\theta - \theta}{2}. \quad (14)$$

I stället för (11) kan man också skriva den allmännare likheten

$$\xi_{i-j} + \xi_{i+j} = 2\xi_i\cos j\theta\ (j < i).$$

Genom addition härav — jag nöjer mig med det fall, då n är udda tal — fås

$$(\xi_1 + \xi_{n-1}) + (\xi_2 + \xi_{n-2}) + \ldots + \left(\xi_{\frac{n-1}{2}} + \xi_{\frac{n+1}{2}}\right) =$$

$$= 2\eta\cos\left(\frac{C}{2} - \theta\right) + 2\eta\cos\left(\frac{C}{2} - 2\theta\right) + \ldots$$

$$\ldots + 2\eta\cos\left(\frac{C}{2} - \frac{n-1}{2}\theta\right),$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n-1}{}' \xi_i = 2\eta \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}{}' \cos\left(\frac{C}{2} - i\theta\right),$$

en formel som leder till (14). Det skadar inte att på dylikt sätt kontrollera en räkning. Jag återgår till (14) och dividerar med $n-1$. Medelvärdet blir

$$\varrho_{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i}{n-1} = \frac{\alpha+\beta}{2(n-1)\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}} \cdot \sin\frac{n-1}{2}\theta .$$

Eftersom

$$\lim_{n\to\infty} (n-1)\sin\frac{C}{2n} = \frac{C}{2},$$

erhålles, då n går mot ∞,

$$\varrho_\infty = \frac{\alpha+\beta}{C}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Om man vill, kan man i dessa formler byta ut $\alpha+\beta$ mot $2\eta\cos\frac{C}{2}$. För $C=\frac{\pi}{2}$ blir

$$\varrho_{n-1} = \frac{\alpha+\beta}{2(n-1)}\left(\cot\frac{\theta}{2}-1\right) = \frac{\eta}{(n-1)\sqrt{2}}\left(\cot\frac{\theta}{2}-1\right),$$

$$\varrho_\infty = 2\cdot\frac{\alpha+\beta}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}\eta}{\pi}.$$

Vad karakteriserar en metall?

Av G. BORELIUS.

Den stora roll metallerna spelar i det dagliga livet såväl som den omständigheten, att cirka $^3/_4$ av de kända grundämnena äro metaller, gör det nödvändigt att vid varje än så kortfattad framställning av materiens former söka göra klart, vad begreppet metall innebär. Man brukar därvid karakterisera metallerna genom deras höga reflexionsförmåga (metallglansen), deras goda elektriska ledningsförmåga och deras goda ledningsförmåga för värme, egenskaper som lätt kunna exemplifieras genom hänvisning till dagliga erfarenheter eller genom enkla experiment. Det kan måhända vara av något intresse att här i korthet söka ange i vad mån den experimentella och teoretiska metallforskningen lyckats bekräfta och fördjupa denna gängse karakteristik av det metalliska tillståndet.

Metallforskningens föremål äro dels de rena metallerna, dels de metalliska blandkristallerna (blandkristallegeringar, metalliska fasta lösningar).

En stor del av de äldre data rörande de rena metallernas egenskaper voro erhållna genom undersökning av tekniska metallpreparat (tråd, plåt, gjutgods) ofta med okänd termisk förhistoria och av måttlig renhet. Sådana undersökningar ge emellertid, exempelvis då det gäller de mekaniska egenskaperna eller de elektriska vid låga temperaturer ofta resultat, som icke ens tillnärmelsevis äro för metallen själv karakteristiska. Som exempel kan nämnas, att den för glödlampsindustrien så betydelsefulla wolframmetallen

länge ansågs som mycket spröd, men att det så småningom visat sig, att denna sprödhet icke är något för de rena wolframkristallerna själva karakteristiskt utan beror på dålig sammanhållning i kristallfogarna, särskilt vid spår av oxidering. Man har numera stora skäl att anta, att sprödhet är något för de rena typiska metallkristallerna främmande och alltid att hänföra till sekundära orsaker. Metallforskningen har i många avseenden kommit in i ett helt nytt skede i och med att man lärt sig framställa långa provtrådar eller stora provstycken innehållande en

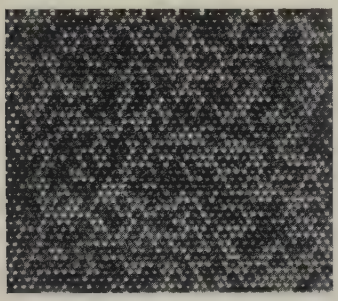


Fig. 1.

Fig. 2.

enda kristall (enkristaller). Som bevis på vad detta i vissa fall kan betyda, kan nämnas, att de bästa erhållna kopparenkristallerna vid flytande vätets temperatur ha ett elektriskt motstånd, som endast är en tredjedel av motståndet hos de bästa tekniska koppartrådarna vid samma temperatur.

Beträffande legeringarna, som ofta äro ett konglomerat av mikroskopiska kristallkorn av två eller flera olika slag, knyter sig det rent vetenskapliga intresset i första hand till egenskaperna hos de enskilda kristallkornen, de metalliska blandkristallerna. De senare årens forskningar ha lärt, att det bland blandkristallerna finnas två väsentligt skilda gränstyper, sådana med oordnad och sådana med ordnad atomfördelning. Fig. 1 visar en modell av ett atomplan i exempelvis en guld-silver-legering med lika antal guld- och silveratomer och typiskt oordnad atomför-

delning. Fig. 2 visar motsvarande atomplan i en 50-procentig guldkopparlegering, där atomerna vid långsam avsvalning av legeringen anta en viss ordnad fördelning.

Jämte blandkristallerna med rent metalliska komponenter uppträda även många oxider, sulfider, nitrider o. s. v. med starkt metalliska egenskaper, vilka därför måste räknas med bland de metalliska faserna. Så ha nitriderna med sammansättningen MN inom gruppen Ti, Zr, Hf ett utseende starkt påminnande om guldets och en elektrisk ledningsförmåga, som är betydligt större än de rena metallernas inom den nämnda gruppen i det att den närmar sig zinkens.

Metallglansen, d. v. s. de rena metallytornas stora reflexionsförmåga för det synliga ljuset, står, som först påvisats av Drude för ett fyrtiotal år sedan, i nära samband med metallernas goda elektriska ledningsförmåga. Ljuset är ju en elektromagnetisk vågrörelse och åstadkommer i metallytan pulserande strömmar, vilka äro starkare och underlätta reflexionen bättre ju större metallens ledningsförmåga är. För de ultraröda, långvågiga strålarna råder ett teoretiskt kvantitativt samband mellan reflexionsförmåga η och ledningsförmåga $\varkappa$. Den av en icke ferromagnetisk metall återkastade bråkdelen av den vinkelrätt infallande strålningen är

$$\eta = 1 - 2\sqrt{\frac{\nu}{\varkappa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

där ν är ljusets svängningstal. Tab. 1 visar överensstämmelsen mellan teori och experiment vid en ultraröd våglängd av 0,0255 mm. Vid kortare vågor kompliceras fenomenet emellertid av en viss selektiv absorption av vissa färgsorter, vilket ju bl. a. visar sig däri, att vissa metaller, såsom koppar och guld, i reflekterat ljus synas färgade.

Metallernas stora värmeledningsförmåga (λ) står även i nära relation till den elektriska ledningsförmågan ($\varkappa$), en

relation som på grundval av experimentella undersökningar sammanfattats i den s. k. WIEDEMANN-FRANZ-LORENZska lagen

$$\frac{\lambda}{\varkappa T} = L, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

där T är den absoluta temperaturen och L är en för olika rena metaller vid icke särskilt låga temperaturer gemensam konstant, den s. k. LORENZkonstanten, vars värde, om elektriska enheter användas, är c:a $2{,}4 \cdot 10^{-8}$ (volt / grad)^2.

Tab. 1.

Metall	$\varkappa \cdot 10^4$	η obs.	η ber.
Silver	39,2	0,989	0,989
Koppar	32,5	0,988	9,987
Aluminium	20,4	0,980	0,984
Zink	10,2	0,977	0,977
Rödgods	7,05	0,973	0,973
Konstantan	2,04	0,948	0,950
Kvicksilver	0,916	0,923	0,925

Man trodde en tid, att denna lag skulle ha en mycket vidsträckt giltighet. Senare mätningar visa dock, att rena metallkristaller vid mycket låga temperaturer ge betydligt lägre värden, exempelvis $L = 0{,}7 \cdot 10^{-8}$ för renaste koppar vid flytande vätets temperatur. Och å andra sidan visa blandkristallegeringar med relativt liten ledningsförmåga avvikande stora värden på L, som i vissa fall uppgå till flera hundra gånger det normala. WIEDEMANN-FRANZ-LORENZ' lag har i själva verket visat sig vara endast en gränslag för rena metaller och höga temperaturer.

Metallerna synas inta en viss särställning även beträffande de mekaniska egenskaperna, en omständighet, som för deras användning i människans tjänst haft den största betydelse, och de rena metallerna synas här karakteriseras

av stor tänjbarhet och mjukhet i förening med stor hållfasthet. Det har emellertid på detta område visat sig särskilt svårt att få gott och entydigt mätmaterial och de enkla relationer, som möjligen finnas, äro oss ännu fördolda. Särskilt beträffande hårdheten har man dock redan inom vissa legeringsserier en nog så tydlig parallellitet med det elektriska ledningsmotståndet.

Den elektriska ledningsförmågan framstår sålunda som metallernas kanske mest karakteristiska egenskap. I varje fall ligger den lättast till hands, då det gäller att för olika ämnen jämföra graden av metalliska egenskaper. Emellertid får man härvid icke den riktigaste jämförelsen genom att använda exempelvis den specifika elektriska ledningsförmågan vid rumstemperatur.

Den specifika ledningsförmågan hänför sig i det absoluta måttsystemet till en centimeterkub av metallen d. v. s. till ett från metall till metall varierande antal atomer. Ur atomteoretisk synpunkt blir det mera rationellt att i stället jämföra ledningsförmågan hos en kub med en gramatoms innehåll, den s. k. atomära ledningsförmågan.

Vid vilka temperaturer ledningsförmågevärdena för olika metaller böra väljas för att bli jämförbara, får man bäst en uppfattning om genom att studera ledningsförmågans, eller enklare dess motsats, ledningsmotståndets temperaturberoende. Motståndet hos rena metaller är som bekant vid högre temperaturer tillnärmelsevis proportionellt mot absoluta temperaturen och hade detta gällt helt ned till de lägsta temperaturerna, hade det givetvis varit riktigast att jämföra olika metallers motstånd vid samma temperatur. Nu avtar emellertid med avtagande temperaturer motståndet hastigare än proportionellt med temperaturen och det hastigare avtagandet inträder förr ju högre en metalls s. k. karakteristiska temperatur är.[1] Det har så långt hittills

[1] Med ett fast ämnes karakteristiska temperatur menas storheten $\Theta = h\nu/k$, där h är den Planckska konstanten, k den Boltzmannska konstanten och ν ett för ämnets atomgitter karakteristiskt svängningstal. Begreppet infördes genom kvantteorien för de fasta kropparnas specifika värme. Θ kan bestämmas bl. a. genom mätning av det specifika värmet vid låga temperaturer. Dylika mätningar ha t. ex. för de i fig. 3 angivna metallerna givit följande karakteristiska temperaturer *Pb* 88°, *Au* 190°, *Pt* 225°, *W* 310° och *Cu* 315°.

föreliggande mätningar ge vid handen visat sig, att motståndets temperaturberoende för mycket rena metallkristaller, liksom temperaturberoendet hos t. ex. det spec. värmet följer en för alla metaller gemensam funktion av förhållandet T/Θ, där T är den absoluta och Θ den karakteristiska temperaturen, så att om ϱ_T och ϱ_Θ beteckna motstånden vid temperaturerna T resp. Θ för en godtycklig metall, är

$$\frac{\varrho_T}{\varrho_\Theta} = f\left(\frac{T}{\Theta}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Som belägg för denna allmänna lag anföres fig. 3, som framställer $\log \frac{\varrho_T}{\varrho_\Theta}$ som funktion av $\log \frac{T}{\Theta}$. De inprickade värdena äro för *Cu* och *W* direkt uppmätta å de bästa hittills framställda enkristallerna, för *Au* och *Pt* idealvärden erhållna genom extrapolation ur mätningar å kristaller av olika renhet. De karakteristiska temperaturerna äro hämtade från mätningar av spec. värmet. Det framgår alltså, att olika metallers motstånd böra jämföras vid samma värden på $\frac{T}{\Theta}$, och detsamma gäller naturligtvis motståndets inversa värde, ledningsförmågan.

Den i tab. 2 framställda atomära ledningsförmågan vid den karakteristiska temperaturen är därför ett lämpligt jämförelseobjekt, då det gäller att skilja mellan bättre och sämre ledare. Tabellen omfattar de bäst undersökta av de 18 grupperna i det periodiska systemet uppställt

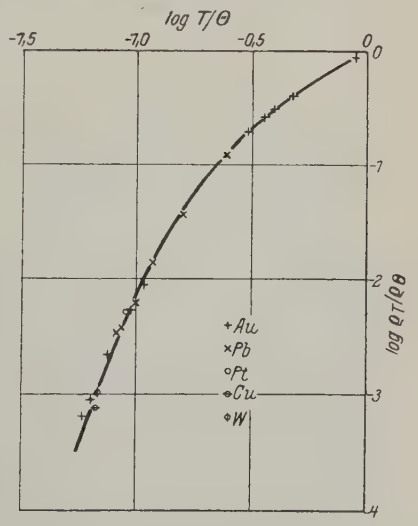


Fig. 3.

enligt Thomsen. Alkalimetallerna (med undantag av *Li*) och metallerna *Cu*, *Ag* och *Au* i den 11-te gruppen äro de bästa och i stort sett lika goda ledare.

Tab. 2.

Atomär ledningsförmåga i $\Omega^{-1} \cdot 10^{-4}$ vid $T = \Theta$.

I	II	VI	VII	VIII	IX
Li 18					
Na 120	Mg 47				
K 170	Ca (39)	Cr 40	Mn 33	Fe 14	Co (14)
Rb (160)	Sr (36)	Mo 33		Ru 11	Rh 36
Cs (150)		W 36		Os 21	Ir 41

X	XI	XII	XIII	XIV	XV
Ni 19	Cu 110	Zn 45			
Pd 24	Ag 180	Cd 53	In (70)	Sn 45	Sb 13
Pt 25	Au 170	Hg 34	Tl (40)	Pb 42	Bi 9

Av blandkristallerna synas de med ordnad atomfördelning förhålla sig på liknande sätt som de rena metallerna i avseende på motståndets temperaturberoende, medan för blandkristallerna med oordnad fördelning till det temperaturavhängiga motståndet kommer ett av temperaturen oftast nästan oberoende s. k. tilläggsmotstånd. Ett särskilt intresse knyter sig till de ferromagnetiska metallerna. Fig. 4 visar, huru för *Ni* motståndet vid låga temperaturer har den för vanliga metaller karakteristiska gången. Strax under avmagnetiseringstemperaturen (T_m) inträder en abnorm stegring av motståndet, och det här tillkommande tilläggsmotståndet blir över denna temperatur bestående. Tack vare den abnorma motståndsökningen vid avmagnetiseringspunkten har man av järn framställt motstånd med förmågan att begränsa

strömstyrkan i en ledning vid ett visst värde, nämligen det värde, som höjer järntrådens temperatur upp till den brant stigande delen av kurvan. Dylika motstånd, som för att undvika oxidation utföras i form av evakuerade glödlampor, ha fått en vidsträckt praktisk användning.

Vi skola slutligen också kasta en hastig blick på teorierna för det metalliska tillståndet.

Den elektriska ledningen i metaller består såsom numera allmänt antas i en transport av elektroner i metallen under inverkan av den elektriska kraften. De Bohrska atommodellerna ha gett en viss om än vag uppfattning om vilken struktur hos de fria atomerna det är, som betingar en god metallisk ledning, sedan atomerna sammanslutits till fasta förband. Atomerna inom grupperna 1 och 11 i tab. 3, d. v. s. inom grupp 1 av Mendelejeffs system, bestå enligt Bohr av en atomkropp (uppbyggd av den positiva kärnan och alla elektronerna utom en) omkretsad av en elektron (kemiens valenselektron, optikens ljuselektron) i en relativt utsträckt bana. Då atomkropparna i metallkristallerna komma varandra helt nära, kan denna elektron tänkas bli frigjord från sambandet med en bestämd atomkropp, d. v. s. bli på ett eller annat sätt rörlig inom kristallförbandet och uppträda som ledningselektron. De icke metalliska elementen äro de, vilkas atomer sakna dylika lätt avskiljbara elektroner (t. ex. *Ne*, jfr fig. 5).

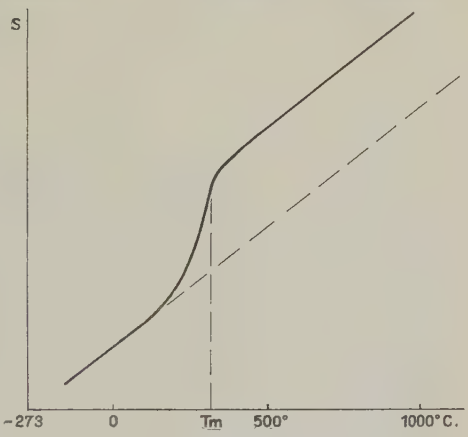


Fig. 4.

Beträffande ledningselektronernas rörelse inom metallkristallerna har man ännu icke lyckats komma till någon klar eller allmänt antagen åsikt. Det har under de sista

trettio åren uppställts en mängd mer eller mindre divergerande teorier för den metalliska ledningen, utan att ännu någon av dessa förmått i någon större utsträckning återge de empiriskt funna lagarna. Den viktigaste punkten i de olika teorierna är deras ställning till frågan om ledningselektronernas rörelseenergi.

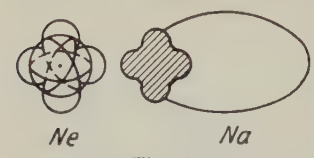


Fig. 5.

Den tidigare mest omhuldade teorien, den DRUDE-LORENTZska, antog ledningselektronerna helt fria och tillskrev dem samma medelenergi

$$E = \frac{3}{2} kT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

(k den BOLTZMANNska konstanten) som tillkommer en molekyl i en enatomig gas. Teoriens stora framgång var att den lyckades förklara WIEDEMANN-FRANZ-LORENZ' lag i den av ekv. (2) givna formen. Den stötte emellertid på andra håll på oöverkomliga svårigheter. Särskilt var det en stötesten, att man ej i metallernas specifika värme såg något till den andel, som elektronerna enligt teorien borde lämna.

Under senare år har den åsikten mer och mer gjort sig gällande, att ledningselektronerna i metallerna skulle ha en betydligt större energi, av samma storleksordning som den från spektroskopien kända energien hos ljuselektronerna i den fria atomen. SOMMERFELD har i anslutning till denna uppfattning gjort det speciella antagandet, att ledningselektronerna i metallerna förhålla sig på samma sätt som molekylerna i en gas vid mycket låga temperaturer. Detta leder till en energifunktion av formen

$$E = E_0 + \frac{3\pi^2}{20} \cdot \frac{k^2 T^2}{E_0} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

där E_0 är energiens värde vid absoluta nollpunkten ($T = 0$), ett värde, som för elektronerna till följd av deras ringa massa blir relativt stort. SOMMERFELDS teori ger liksom DRUDES ekvationen (2) men undgår svårigheterna be-

träffande specifika värmet. Den lämnar emellertid en mängd kända fenomen ouppklarade, så t. ex. de omtalade typiska avvikelserna från den WIEDEMANN-FRANZ-LORENZska lagen och det i fig. 3 återgivna typiska temperaturberoendet hos metallernas ledningsmotstånd. Man arbetar f. n. flitigt på att söka förbättra den SOMMERFELDska teorien med den nya vågmekanikens hjälp, och det är möjligt, att man här inom kort skall komma ett väsentligt steg framåt.

Det fotografiska omvändningsförfarandet vid direkt framställning av positiva bilder.

Av HELMER BÄCKSTRÖM.

Under allra senaste tiden har amatörkinematografien förts ett avsevärt steg framåt genom framkomsten av ett standardiserat smalfilmformat, vilket med all sannolikhet kommer att bliva av stor betydelse för den s. k. skolfilmen. Den förstoring, som smalfilmen tillåter, är nämligen tillräcklig för hemmens och skolornas behov, och genom det mindre formatet förbilligas filmen i hög grad. Smalfilmen erbjuder dessutom ett par andra beaktansvärda fördelar. Genom att man uteslutande använder obrännbart filmmaterial har brandfaran helt eliminerats, och så behövs endast *en* filmremsa, ej såsom hittills två — en negativ- och en positivfilm. Den positiva bilden kan nämligen direkt åstadkommas på upptagningsfilmen. Härigenom nedbringas ävenledes kostnaderna avsevärt.

Framställningen av den positiva bilden direkt sker enligt det s. k. *omvändningsförfarandet,* som redan länge använts inom färgfotografien men som nu även tagits i kinematografiens tjänst. Då detta förfaringssätt torde vara obekant utanför fackmännens krets, har jag blivit ombedd att här lämna en kort redogörelse för detsamma.

Först må erinras om hur man på vanligt sätt framställer

ett fotografiskt negativ. Som bekant består det fotografiska upptagningsmaterialet av ett hållbart underlag (vid filmen ett celluloidskikt), på vilket är gjuten en ljuskänslig hinna bestående av gelatin med inmängda ytterst finkorniga bromsilverkristaller. Belyses detta material i kameran, så uppstår på detsamma en latent bild. Vid framkallningen utreduceras svart silver på de belysta ställena, och en negativ bild framträder. Vid »fixeringen» bortlösas därefter det resterande bromsilvret, och så har man det fotografiska negativet.

Vid omvändningsförfarandet utgår man från en liknande film, som exponeras och framkallas såsom vanligt men ej fixeras. Fig. 1 åskådliggör en starkt förstorad genomskärning av en filmhinna efter framkallningen.

Själva det känsliga skiktet har därvid betecknats med I, celluloidunderlaget med II. Den i figuren överst belägna delen har sålunda i kameran varit vänd mot ljuset. Vid framkallningen har svart silver utreducerats på de belysta ställena (a) i mängder, som äro proportionella med belysningsgraden (åtminstone i huvudsak). De obelysta partierna (b) samt de djupare partierna av det känsliga skiktet innehålla emellertid fortfarande bromsilver (de streckade delarna av figuren). Vore det sålunda fråga om vanlig negativframställning, så skulle detta bromsilver bortlösas. Nu gäller det emellertid att framställa en *positiv* bild. Man fixerar därför ej utan nedför i stället den framkallade bilden i ett s. k. *blekbad,* som förmår *upplösa silvret men lämnar bromsilvret orört.* Blekbadet har således precis motsatta verkningar mot fixerbadet. Som blekbad användes antingen en utspädd lösning av kaliumpermanganat, försatt med

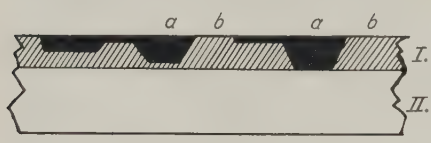


Fig. 1

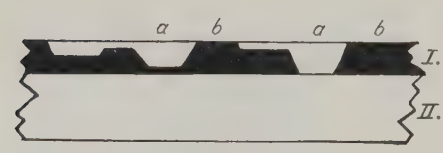


Fig. 2.

svavelsyra, eller också en likaledes svavelsur lösning av kaliumbikromat.

Efter behandlingen med blekbadet är sålunda det svarta silvret bortlöst, men kvar finnes bromsilvret i filmen (det streckade partiet, fig. 1). Detta återstår emellertid i mycket olika mängder i olika delar av bilden. Där det ursprungliga negativet varit obelyst (skuggpartierna), har filmen naturligtvis sin ursprungliga bromsilvermängd kvar. I bildens dagerpartier återigen, där negativet innehållit mycket utreducerat silver, återstår föga eller intet bromsilver. Lägga vi den blekta bilden efter en kort sköljning ånyo i framkallaren och utsätta den samtidigt för ljusets inverkan, så reduceras givetvis även det kvarvarande bromsilvret till silver (se fig. 2, det svarta partiet). Det är tydligt, att den så uppkomna bilden blir mörkast, där det ursprungliga negativet var ljusast och tvärtom. Vi hava alltså erhållit en positiv bild.

Omvändningsförfarandet är mycket snabbt utfört. Den första framkallningen tager naturligtvis samma tid, antingen det är fråga om negativ- eller positivframställning. Därefter sköljes helt kort (någon minut). Blekbadet verkar synnerligen snabbt. Efter någon minuts förnyad sköljning kommer så framkallningen numro två. Det är vid den nu kommande efterbehandlingen, som tidsvinsten vid omvändningsmetoden särskilt framträder. Medan ett fixerat negativ behöver flera timmars sköljning i rinnande vatten för avlägsnande av det farliga fixersaltet, som totalt skulle förstöra negativet, om det lämnades kvar, kan den omvända bilden efter några minuters sköljning upphängas till tork.

Nu är det emellertid så, att en film, som skall omvändas, alltid har mycket tunt gelatinskikt. Skälet härför är mycket lätt att fatta. Låt oss exempelvis antaga, att bromsilverskiktet i fig. 1 varit dubbelt så tjockt som teckningen anger. Den första framkallningen utreducerar emellertid endast samma silvermängd som nyss. Efter silvrets bortlösande återstår alltså ett tjockt bromsilverskikt, som endast här och var (i det ursprungliga negativets dagerpartier) är något tunnare. Vid framkallningen numro två erhålles

följaktligen en tät silvermassa, som ej tillåter oss iakttaga de små variationerna i dess täthet. Vid negativframställningen är det emellertid ej så. Där kan det överflödiga bromsilvret bortlösas i fixerbadet, vore det även förhanden i aldrig så stor mängd. Negativfilm har därför alltid relativt tjockt gelatinskikt, omvändningsfilm återigen tunt. Det är givet, att den förra vid torkningen relativt sakta skall avlämna sin i det starka gelatinskiktet befintliga stora vattenmängd. Omvändningsfilmen torkar däremot på bråkdelen av den för negativets torkning erforderliga tidrymden.

Av det sagda torde framgå, att omvändningsprocessen är synnerligen förmånlig i åtskilliga avseenden. I första hand erhålles sålunda en tidsbesparing. En direkt positiv omvändningsbild framställes sålunda på kortare tid än ett negativ. Därtill kommer, att vid detta senare hela processen måste upprepas vid positivets framställning. Ekonomiskt ställer den sig förmånlig, då ju intet negativ behöver framställas. Denna materialbesparing bliver alltså ända upp till 50 %.

Nu kan man emellertid fråga sig, huruvida det likväl ej har sina fördelar att ha ett negativ, som kan kopieras i önskat antal exemplar. Gäller det ett stort antal kopieringar, så måste man givetvis anse framställningen av ett negativ berättigad; då kommer ju också negativkostnaden att fördelas på de skilda positiven. Det må emellertid påpekas, att även de enligt omvändningsförfarandet framställda positiva bilderna låta kopiera sig, naturligtvis då med användning av omvändningsfilm för kopiorna. Dessa kopior bli även mycket goda.

Såsom förut nämnts har omvändningsförfarandet tidigare använts inom färgfotografien och har här utnyttjats vid de mest använda och framgångsrika metoderna, särskilt vid framställning av s. k. autokrombilder liksom vid »Agfa Farbenplatten», m. fl. Man kan emellertid vänta, att förfaringssättet, då det nu tagits i kinematografiens tjänst och därvid noggrant utprövats, kommer att få en mycket stor spridning och betydelse.

Metoder att bestämma luftens syrehalt.[1]

Av KNUT PARCK.

Vid den första kemiundervisningen i realskolan torde luftens syrehalt tämligen allmänt bestämmas på så sätt, att järn får glöda inom en avgränsad luftvolym. I regel utföres väl försöket i enlighet med Molls förslag sålunda, att ett rymligt provrör stjälpes över en i en skål med vatten placerad järnställning, som upptill bär ett litet metalltrådsnät med det glödande järnpulvret. Det må tillåtas mig att antaga, att alla kemilärare, som låta eleverna utföra detta experiment som kvantitativt försök, härvid hava gjort samma erfarenhet, nämligen att alldeles för höga värden på syrehalten erhållas; detta även om försöket utföres med största omsorg. Resultatet är ju nedslående, men efter allt att döma fullt naturligt. Det torde helt enkelt vara omöjligt att placera provröret över det glödande järnet, utan att en del av den starkt upphettade luften tränger ut. Ändras tillvägagångssättet, så att man använder en burk med avsprängd botten och inför det glödande järnet i en liten metallnätskorg, vilken medelst en kedja och en tråd av metall är fäst i en till halsen passande kork (föreslaget av lektor Bror Gustaver i oktoberhäftet 1927 av denna tidskrift), blir resultatet icke stort bättre. Skillnaden är blott den, att luft i detta fall tränger ut en övre väg i stället för en nedre i förra fallet. I allmänhet erhållas, vilket tillvägagångssätt som än användes, värden, som ligga ungefär lika nära 25 som 20%.

Då det enligt mitt förmenande i allmänhet är olämpligt att låta eleverna utföra kvantitativa experiment, som på grund av försöksbetingelser, vilka uppenbarligen icke av

[1] Ur ett föredrag med demonstrationer för lärarkandidater.

dem kunna bemästras, giva missvisande resultat, har jag för min del slopat detta experiment som kvantitativ övningsuppgift. Men då det för övrigt är synnerligen instruktivt, kan det användas — i en eller annan form — för att låta eleverna få ett påtagligt bevis för att någonting från luften förbrukas, då järn glöder. De kvantitativa bestämningarna av luftsyret förläggas till lektionstimmarna.

Det sedan gammalt använda sättet att låta fosfor brinna i en avgränsad luftvolym ger acceptabla värden på syreprocenten. Att man i regel erhåller något för små värden, kan möjligen bero på att reaktionen mellan fosfor och syre avstannar, innan syret fullständigt förbrukats.

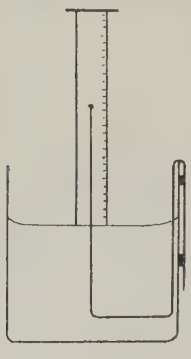


Fig. 1.

Man kan använda fosfors oxidation för att bestämma luftens syrehalt utan att antända fosforn, i det man låter fosfor självoxidera sig i luft vid vanlig rumstemperatur. Härvid kan följande tillvägagångssätt begagnas. En liten bit gul fosfor fastsättes på en till en fin spets utdragen glasstav, vilken är böjd, så att den kan hängas över kanten av en vanna innehållande vatten (fig. 1). Över fosforbiten stjälpes en mätcylinder, som lämpligen är avtagen, så att graderingen når ända ned till kanten. Man märker genast, hur från fosforbiten utgå vita moln (P_2O_3), som begärligt uppsugas av vattnet (helst om detta är försatt med något natronlut). Göres rummet mörkt, kan klassen tydligt se fosforescensen. Det hela får stå till en följande lektion. Reaktionen är slutförd efter ett dygn (100 cm^3 luft). De på detta sätt erhållna värdena på luftens syrehalt äro minst lika goda som de, vilka fås vid fosfors förbränning.

Medan dessa två metoder kunna lämpa sig som katederexperiment i realskolan, ställer man sig tveksam beträffande lämpligheten av att på detta stadium använda ett så pass komplicerat sammansatt ämne som pyrogallol

som absorptionsmedel för syrgas. Det kanske är lämpligast att demonstrera denna metod på gymnasiet i samband med behandlingen av de organiska ämnena.

I natriumhydrosulfit ($Na_2S_2O_4$) har man ett lämpligt syreupptagande ämne, vilket numera kan erhållas till relativt billigt pris. Reaktionsförloppet är ju enkelt och överskådligt. Absorptionen slutföres på några minuter. Goda värden erhållas.

En metod, som både ger utmärkta resultat och är synnerligen instruktiv, då den bl. a. kan tjänstgöra som ett experimentellt belägg för riktigheten av Gay-Lussacs kemiska volymlag, är följande, som dock icke torde vara så värst allmänt använd vid elementarundervisningen, fast den är synnerligen enkel. I en i ett eudiometerrör instängd luftvolym införes vätgas, varefter man, sedan jämvikt inträtt, låter en elektrisk gnista antända gasblandningen. Sedan tillståndet i eudiometerröret stabiliserats, avläses den återstående gasvolymen. Man kan gott använda vatten som spärrvätska. Har a cm^3 luft avspärrats, b cm^3 vätgas tillförts, och återstår efter explosionen c cm^3 gas, så har vid denna $(a + b - c)$ cm^3 gas försvunnit. Under förutsättning att tillräckligt med väte införts, så är enligt formeln $2H_2 + O_2 = 2H_2O$ en tredjedel av den försvunna gasvolymen lika med den i den ursprungliga luftvolymen befintliga syremängden; alltså syreprocenten $\frac{a + b - c}{3\,a} \cdot 100$. Man erhåller värden omkring 20,5 %; olika värden avvika från varandra endast ett par tre enheter i första decimalen. Metoden lär ha använts redan av Volta.

Mest överskådligt torde det vara att fixera luftsyret medelst en av de vanliga metallerna, bland vilka koppar av flera skäl är att föredraga framför andra. Sedan gammalt har man ju vid noggranna luftanalyser gått till väga så, att man i en på lämpligt sätt (Hempels gasbyrett) avgränsad luftvolym med tillhjälp av en elektrisk ström

uppvärmer en fin koppartråd, så att den oxideras. Men då koppar har stor ledningsförmåga för elektricitet, tar det med relativt svag ström lång tid, innan en viss syrekvantitet bundits. Å andra sidan måste stark ström användas, om man vill genomföra oxidationen vid hög temperatur. Som skolexperiment kan näppeligen metoden i denna form komma till användning, helst som en lämplig gasbyrett ställer sig ganska dyrbar. Emellertid kan metoden ändras, så att den med fördel kan begagnas vid skolundervisningen, utan att man behöver anskaffa någon dyrbar apparatur. I stället för koppartråd kan man betjäna sig av en motståndstråd (nickelin, konstantan e. dyl.), vilken på elektrolytisk väg överdrages med ett lager av koppar. Men härvid har man att tillse, att kopparn ej utfälles med alltför liten katodisk strömtäthet, då den fastnar som ett kompakt, finkornigt lager, som blir en utmärkt ledare för elektriciteten. Användes däremot relativt stark ström, erhålles ett för det avsedda ändamålet lämpligt, grovkornigt kopparlager. Släpper man genom en dylik »koppartapetserad» motståndstråd inom en avgränsad luftvolym en ström av lämplig styrka, oxideras kopparn på kort tid och förbrukar därvid det tillgängliga syret. Sedan man väl en gång gjort sig förtrogen med försöksteknikens detaljer, är metoden enkel och bekväm att använda vid klassundervisningen. Följande tillvägagångssätt kan rekommenderas den, som önskar pröva densamma. Ett par korta, minst 3 mm tjocka metalltrådar av koppar eller mässing föras genom hålen i en god gummipropp; det är av vikt att metalltrådarna gå riktigt trögt genom hålen, så att icke någon möjlighet finnes för luft att tränga genom där. Vid metallstavarna fastlödes en motståndsspiral, framställd av t. ex. en cirka 30 cm

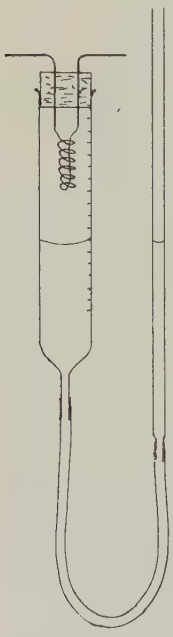


Fig. 2.

lång och 0,25 mm tjock nickelintråd. På denna utfälles ett tillräckligt tjockt lager av elektrolytkoppar med stor kornstorlek. Vid en dylik spiral, avsedd för en luftvolym på högst 50 cm^3, utfälldes kopparn med en ström på 1 amp. under 20 minuter. Den så preparerade spiralen doppas ned i vatten för avlägsnande av vidhäftande kopparsulfat och får därefter torka. Gummiproppen med spiralen fastsättes ordentligt i ett graderat glasrör[1] (diameter cirka 2,5 cm, längd cirka 30 cm), nedtill utdraget till ett smalare, kort rör, på vilket bändslas en gummislang, som förbinder apparaten med en som nivåkärl tjänande byrett (fig. 2). Som spärrvätska användes vatten eller kvicksilver. Vid fastsättandet av proppen i apparaten händer det understundom att något kopparpulver faller av; vid användning av kvicksilver som spärrvätska är detta en olägenhet, som i någon mån försvårar avläsningarna. Det är naturligtvis nödvändigt att kontrollera såväl före som efter en undersökning, att apparaten är fullständigt lufttät. Genom spiralen släppes en elektrisk ström av sådan styrka (2—3 amp.), att svag rödglödning ställvis kan iakttagas på spiralen. Lämnas vid elektrolysen ett litet stycke av spiralens övre del oförkopprad, kan man där iakttaga glödningsgraden. Vid strömpassagen märker man, hur oxidationen inträder och fortskrider. Tiden för oxidationsprocessens genomförande är naturligtvis för en viss strömstyrka i huvudsak beroende på kopparskiktets beskaffenhet. Vid lämplig kornstorlek och strömstyrka kan syret hos t. ex. 50 cm^3 luft fixeras på 10—15 minuter. Med tillhjälp av nivåkärlet ordnar man så, att gastrycket i apparaten hela tiden är lika med det yttre trycket. Avläsningarna av luft- och kvävevolymerna göras naturligtvis först sedan man övertygat sig om, att jämvikt inom systemet inträtt.

Som exempel på värden på luftens syrehalt enligt denna metod anföres följande serie: 20,7; 20,5; 20,6; 20,2; 20,4;

[1] Ett dylikt glasrör, graderat i mm jämte en därtill passande gummipropp med två hål, kostar kr. 7,50 hos firman R. Grave, Stockholm.

20,1; 20,5; 20,6. Serien omfattade egentligen 10 undersökningar, men i ett fall brändes tråden av på grund av att för stark ström användes, och i ett annat hade för litet koppar utfällts på spiralen. Försöksbetingelserna hava naturligtvis varierats i olika avseenden i de särskilda fallen.

Barometrar och höjdmätare enligt system Paulin.

I den kedja av epokgörande uppfinningar, som bragt det svenska namnet ära och berömmelse, har sedan några år tillbaka infogats ytterligare en länk, den Paulinska aneroiden. Ehuru denna redan är på god väg att bli en världsartikel, torde dess konstruktion ännu vara relativt litet känd utom fackmännens krets. För att giva denna tidskrifts läsare en orientering härutinnan ha nedanstående rader tillkommit.

Den princip, som av VIDI 1845 lades till grund för aneroiden, är som bekant följande: en hermetiskt sluten, evakuerad metalldosa, som genom en stark fjäder hålles utspänd, blir vid förändring av lufttrycket hoppressad eller utvidgad, varvid dosans rörelser genom hävstänger, kedjor och trissor överföres till en runt över en skala rörlig visare. Trots under tidernas lopp gjorda förbättringar har man icke lyckats frigöra de efter denna princip konstruerade aneroiderna från vissa fel. Tack vare glapprum och friktioner vid lagringsställen och i kedjelänkar är visarens ställning icke fullt bestämd. Härtill kommer utom från temperaturväxlingar härrörande fel en särskilt vid mätning av större höjder märkbar nackdel i och med de svårligen eliminerbara elastiska efterverkningarna. Ingenjör G. PAULIN har nu (1923—1925) genom en genialisk idé infört en radikal förbättring, vilken kan karakteriseras genom följande tre huvudpunkter: 1:o Alla lagringar mellan dosa och visare äro eliminerade. 2:o Genom att tillämpa en nollmetod bringas dosan att vid instrumentets avläsning alltid stå i normalläge. Dosans största rörelser på båda sidor om detta äro begränsade till $^1/_{40}$ mm, varför elastiska efterverkningar praktiskt taget äro reducerade till noll. 3:o Missvisningar till följd av temperaturförändringar ha — på icke offentliggjort sätt — nedbringats till mycket låga belopp, enligt uppgift till c:a en tiondel av de hos aneroider av andra typer förekommande.

Fig. 1 visar den nya aneroidens konstruktion (fig. 2 framifrån med skalor och visare). Lufttrycket verkar på metalldosan *a*, som hålles utspänd av den som motvikt till trycket tjänande fjädern *b*. Fjäderns spänning kan efter behag ändras genom omställning av mikrometerskruven *c* med tillhjälp av den i fig. 1 överst befintliga centrumknappen eller ratten (även synlig i mitten av fig. 2). Fjäderns övre ända är fastgjord i muttern *d*, som av styrarmen *e* hindras att svänga runt och i

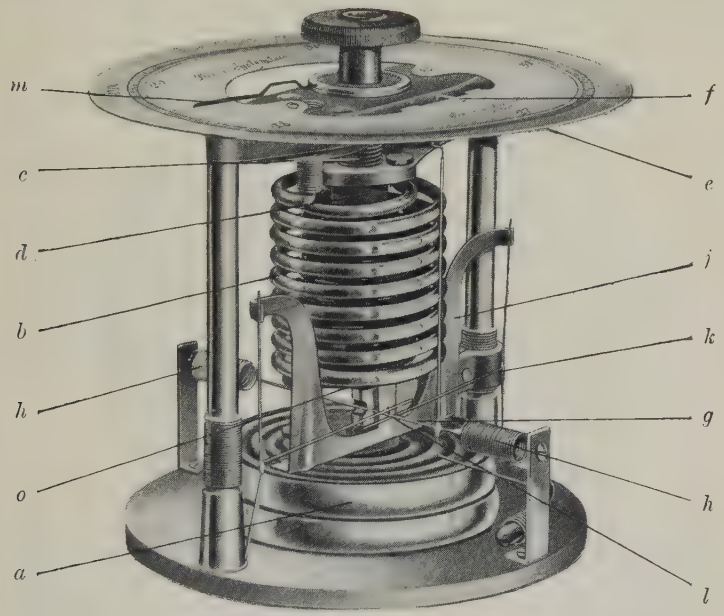


Fig. 1. Schematisk framställning av en Paulin-aneroids konstruktion.

stället genom vridning av centrumknappen föres upp eller ned. Vid mätningen spännes fjädern, tills dosan kommer exakt i ett visst normalläge — nolläget —, vilket senare skarpt kan iakttagas genom en över en med nollstreck försedd skala rörlig visare *f*, kallad »tendensvisaren». Det sätt, varpå rörelsen överföres från dosan till tendensvisaren, utgör ett av uppfinningens huvudmoment. Den axel *g*, på vilken visaren sitter fästad, är icke lagrad utan upphängd i tvenne fjädrar *h*. Från dosan till visaraxeln överföres rörelsen medelst ett system av fyra böjliga fosforbronsband, symmetriskt placerade två och två. Ovanpå dosan sitter fastgjord en s. k. bandhållare *j*, vid vilken de övre

ändarna av tvenne vinkelböjda band äro fastlödda, under det att de nedre ändarna äro fästade i stativet. Från de båda vinkelspetsarna utgå banden *k*, som dessutom äro förenade med var sin ända av ett i nyssnämnda axel *g* fästat stift *l*. Alla banden hållas samtidigt spända medelst fjädrarna *h*. En liten rörelse hos dosan fortplantar sig starkt förstorad till bandfästena vid axeln *g* och iakttages, ytterligare förstorad, å tendensvisaren. Den till denna visare hörande skalan innehåller utom redan nämnda nollstreck beteckningarna + och— (synliga

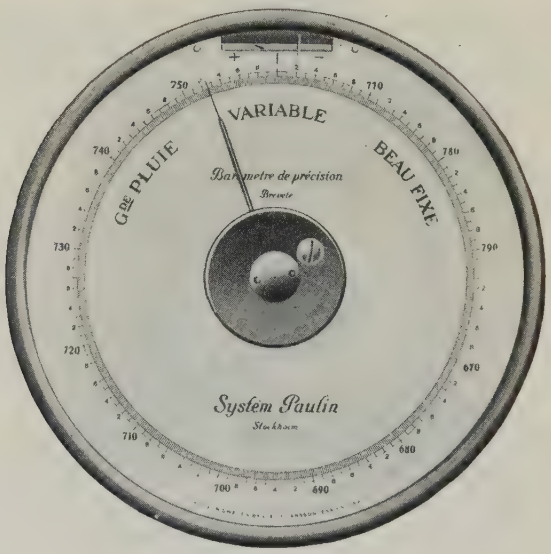


Fig 2.

å fig. 2). Vid stigande lufttryck strävar visaren att gå mot +, vid fallande åt —. Dosans rörelsefrihet på båda sidor om normalläget är genom stoppskruvarna *o* begränsad till $^1/_{40}$ mm, motsvarande en rörelse hos tendensvisaren av 8 à 10 mm från nollstrecket. Den vid centrumknappen fästade huvudvisaren *m* anger lufttrycket å en cirkelskala.

Justering av instrumentet sker genom att den å centrumknappen synliga justerskruven (fig. 2) och därmed huvudvisaren vrides så, att instrumentet överensstämmer med en normalkvicksilverbarometer. Tendensvisaren måste härvid stå på 0. Vid begagnandet vrider man sedan helt enkelt centrumknappen, tills tendensvisaren pekar på 0, varvid huvudvisaren omedelbart

anger det verkliga trycket. Denna senare kvarstår sedan i oförändrat läge till dess nästa avläsning göres. Av tendensvisarens ställning under mellantiden kan återigen avgöras, huruvida lufttrycket undergått förändring och i vilken riktning detta skett. Ett eventuellt ringa fel vid avläsningen på grund av »dödgång» i mikrometerskruven kan, om det gäller stor noggrannhet, elimineras på vanligt sätt genom att vridningen före den skarpa inställningen alltid sker i samma led.

Vid användning för höjdmätning är huvudskalans nollpunkt justerad efter visst medelbarometerstånd (för mellersta Europa 762 mm *Hg*) och skalan beräknad för viss lufttemperatur (+ 10 ° *C*). Å skalan avläst höjdskillnad korrigeras genom tabeller med hänsyn till det mellan orterna belägna luftskiktets medeltemperatur. Medelst de för nivelleringsarbeten avpassade aneroiderna kunna enligt uppgift avläsningar på 25 cm när göras.

I enlighet med de nya principerna har ingenjör PAULIN nyligen konstruerat en självregistrerande barograf. — För ytterligare detaljer beträffande aneroiderna och deras användningssätt för speciella ändamål hänvisas till av *System Paulin Aktiebolag, Stockholm*, utgivna kataloger och beskrivningar. Här lämnade redogörelse är baserad härpå.

Torsten Wetterblad.

Elevernas enskilda arbete.

Det enskilda studiearbetet i ring III och IV enligt den nya skolorganisationen torde komma att, särskilt beträffande ämnena fysik och kemi, vålla läroverken bekymmer och svårigheter. Naturligtvis kan ej allt planläggas och ordnas i förväg Men man får se till, att icke skolan och lärarna stå oförberedda den dag, arbetet skall börja. Man får söka göra det bästa möjliga med de resurser, som stå till buds och sedan bygga på en så småningom vunnen erfarenhet. Tre punkter äro av särskild vikt: god tillgång på lämplig och omväxlande litteratur; ett rikhaltigt urval av arbetsuppgifter, tillgodoseende olika intressen av teoretisk eller praktisk art; ordnad lokalfråga. Sistnämnda spörsmål får ju lösas med hänsyn till lokala omständigheter. Önskvärt torde emellertid vara att ha två för dessa arbeten avsedda laboratorier: ett för kemi och ett för fysik-biologi.

Några synpunkter på det enskilda arbetet äro berörda i följande uttalanden från ämneskonferenserna i fysik och kemi vid Östermalms läroverk.

Fysik. »Enskilt arbete inom ett område av fysiken förutsätter dels goda kunskaper inom alla delar av fysikkursen och dels så grundliga kunskaper i matematik, att eleverna med behållning kunna läsa större arbeten i fysik De lärjungar, som i höst börja i ring III, sakna dessa förutsättningar, enär de ej ha någon kännedom om fysikens viktigaste delar, nämligen elektricitetsläran och optiken samt dessutom sakna kännedom om funktionsläran. Konferensen ansåg därför, att lärjungarnas förutsättningar att med framgång kunna bedriva enskilda studier i fysik voro mycket små.

Om enskilda laborationer skola anordnas, böra dessa förläggas till en särskild lokal, till vilken lärjungarna äga tillträde och kunna arbeta utan att störa själva skolarbetet. Man ansåg, att det vore fullkomligt förkastligt att låta enskilda laborationer bedrivas i samma lokaler som de obligatoriska laborationerna.

Vid alla högskolor och universitet måste alltid någon lärare vara närvarande, då ovana laboranter arbeta på laboratoriet. Enär risken att släppa en mängd skolpojkar ensamma i ett laboratorium är mycket stor, ansåg konferensen, att en lärare alltid borde vara närvarande.

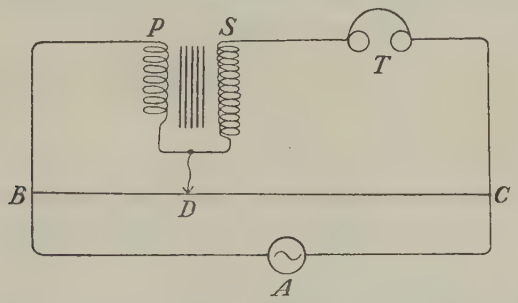
Utom nämnda vakthållning, som kan delas upp mellan olika lärare, kommer arbetet för den lärare, som skall ge förslag om lämpliga uppgifter för det enskilda arbetet, skaffa erforderliga apparater, övervaka arbetet och dessutom granska de skriftliga redogörelserna, att avsevärt ökas. Konferensen ansåg, att detta extraarbete borde minska nämnda lärares tjänstgöring med förslagsvis minst 4 veckotimmar.»

Kemi. »Diskuterades kursplanen och särskilt det enskilda arbetet, som nästa läsår skall begynna i ring III. Som resultat av diskussionen beslöt konferensen göra följande uttalande. Det syntes konferensen i viss mån betänkligt, att det enskilda arbetet börjar samtidigt som de obligatoriska laborationsövningarna. Eleverna sakna ju varje praktisk erfarenhet av att på egen hand syssla med kemiska försök. Det syntes, som om det enskilda arbetet skulle kräva samma handledning och eftersyn som övriga laborationsövningar. Konferensen ansåg därför, att läroverket ej kan iklåda sig något ansvar för elevernas säkerhet, om dessa skola ensamma utan kontroll utföra kemiskt arbete. Vådorna vid kemiskt arbete äro ju betydligt större än vid övningar i de övriga naturvetenskapliga ämnena. Konferensen ansåg, att för handledning och översikt samt genomgång av resultaten kräves minst 4 timmars extra arbete för varje laborationsgrupp och detta bör således ingå i lärares tjänstgöring som vanliga undervisningstimmar.»

H -m.

En enkel metod att bestämma omsättningsförhållandet hos förstärkartransformatorer.

Den i det följande beskrivna metoden har jag ej sett omnämnd i litteraturen, och då den är synnerligen enkel, kan den kanske förtjäna en kort beskrivning. Växelström eller pulserande likström från en induktionsapparat eller summer (*A*) sändes genom en vanlig bryggtråd *BC*. Parallellt med den ena, av skjutkontakten *D* begränsade delen av bryggtråden kopplas transformatorns primärlindning *P*, parallellt med den andra delen transformatorns sekundärlindning *S* och en hörtelefon *T*. Genom primärlindningen flyter en växelström, som är proportionell mot



spänningen mellan *B* och *D* och i det närmaste 90° fasförskjuten i förhållande till denna, om primärlindningens ohmska motstånd är tillräckligt litet i förhållande till dess induktiva. Sekundärspänningen är vid tomgång, vilket här praktiskt taget är fallet, 90° fasförskjuten i förhållande till strömmen genom primärlindningen, d. v. s. nära 180° i förhållande till spänningen mellan *B* och *D*. Om impedansen hos primärlindningen är stor i jämförelse med motståndet hos tråden *BD*, kunna strömstyrkorna i trådens båda delar anses lika. Spänningsfallen bli då i fas med varandra; vid riktig inkoppling av transformatorn och inställning av skjutkontakten blir sekundärspänningen lika stor som och nästan i fas med spänningsfallet i *DC*, varför ljudstyrkan i telefonen blir minimum. Förhållandet mellan sekundär- och primärspänning, d. v. s. det sökta omsättningsförhållandet, är då lika med förhållandet mellan längderna *DC* och *BD*. Mätningen sker med nästan strömlös sekundärlindning, vilket är det normala arbetsvillkoret för en förstärkartransformator. Har man tillgång till en källa för sinusformig ström med variabel frekvens, kan man undersöka, om omsättningsförhållandet beror på frekvensen.

Sven Benner.

Bokanmälningar.

KOSMOS, *Fysiska uppsatser*, Bd 7, Utgivna av svenska Fysikersamfundet. P. A. Norstedt & Söner (i distribution) Stockholm 1929, 232 sid. I bokhandeln häft. kr. 10: — Medlemskap i samfundet — årsavg. kr. 10: —, anmälan till prof. G. BORELIUS, Tekniska Högskolan, Stockholm — medför rätt till ett bundet ex.

Under de senaste decennierna har inom fysiken gjorts en mängd epokgörande upptäckter såsom radioaktiviteten, röntgenstrålningen, elektronerna, isotoperna, radion m. fl. Att denna utveckling alltjämt fortgår i hastigt tempo blir man klart övertygad om vid genomläsandet av 7:e bandet av KOSMOS, som innehåller på briljant sätt skrivna uppsatser över de allra senaste forskningarnas resultat.

Lektor D. ENSKOG skildrar H. A. LORENTZ' forskargärning, och då denna sammanfaller med en intressant period av fysikens utveckling och LORENTZ ihärdigt och med framgång brottades med de problem, som utvecklingen uppställde, blir ENSKOGs uppsats icke bara en minnesruna utan även en lärorik översikt av fysikens utveckling under denna tid.

Fil lic. S. BENNER redogör för F. W. ASTONs högaktuella undersökningar över isotopa element. De av ASTON 1919 och 1925 konstruerade mass-spektrograferna såväl som mätningsmetoder och resultat äro utförligt behandlade. En översikt upptager alla hittills kända isotoper av icke radioaktiva ämnen. Särskilt intressanta äro de resultat, som Aston erhållit med sin nya apparat. Tack vare den stora mätnoggrannheten har man otvetydigt lyckats visa, att isotopernas atomvikter ej äro exakta heltalsmultipler av vätets atomvikt (1,00778), vilket de borde vara, om alla atomkärnor vore uppbyggda av vätekärnor och elektroner. Avvikelsen uppgår dock endast till några promille och anses bero på den energimängd, som frigöres, då vätekärnor och elektroner packas ihop i atomkärnan. En annan intressant nyhet är existensen av två syreisotoper 17 och 18, vilket påvisades 1929 med tillhjälp av bandspektra.

Alldeles särskilt intressant är amanuens E. FREDLUNDs redogörelse för de experimentella undersökningarna över elektronernas vågnatur. Genom de av DAVISSON och GERMER 1927 utförda böjningsförsöken, som utförligt skildras, hava elektronernas vågnatur ställts utom allt tvivel. Man måste ge författaren rätt, då han framhåller, att dessa försök i framtiden

komma att räknas till fysikens klassiska arbeten. I samma höga klass står också det av G. P. THOMSON år 1928 utförda försöket över elektronstrålarnas avböjning vid passage genom tunna metallfolier. De böjningsfigurer, som man erhåller på en bakom metallfoliet placerad fotografisk plåt, påminna i hög grad om Newtons färgringar. Den på sidan 81 reproducerade bilden, som erhållits med ett guldfolium, är särskilt vacker. Att de avböjda strålarna verkligen äro elektronknippen, ha bevisats genom anläggande av elektriska och magnetiska fält. Att elektronböjning även inträder vid vanliga mekaniskt ritsade gitter, är fullkomligt obegripligt från klassisk ståndpunkt men förklaras enkelt med DE BROGLIEs teori och möjliggör en experimentell bestämning av De Broglie-vågens våglängd.

Prof. V. M. GOLDSCHMIDT skriver om modern kristallkemi och lektor E. JÖNSSON redogör för nyare undersökningar över röntgenstrålarnas absorption och de lagar man funnit, lagar med vars tillhjälp man erhåller en god överblick av hithörande fenomen.

Doc. A. LARSSON fortsätter sina i en tidigare årgång av KOSMOS beskrivna arbeten över egna, högt drivna precisionsmätningar vid röntgenstrålarnas spegling och brytning.

Prof. B. LINDBLAD redogör för arbetet vid en av de expeditioner, som vid solförmörkelsen 1927 studerade solens flashspektrum, d. v. s. det emissionsspektrum, som under några sekunder framblixtrar vid en total solförmörkelse. Arbetet kan påräkna ett speciellt intresse av den anledningen att detta är första gången som resultat av fotografering medelst filmkamera vid solförmörkelse äro synliga i litteraturen.

Den av RAMAN år 1928 upptäckta nya strålningen skildras i en högintressant uppsats av prof. HULTÉN. Detta nya fenomen uppträder på följande sätt. Belyses t. ex. en i ett kärl innesluten, omsorgsfullt renad vätska med monokromatiskt ljus, så utgår från vätskan en diffus strålning, som i en spektrograf visar sig bestå av en eller flera ljussvaga spektrallinjer (Ramanlinjer), som ej förekomma i det infallande ljuset. Dessa sekundert emitterade vågor ha sitt ursprung i molekylerna och bringa oss alltså budskap om tillståndsändringar i dem. Denna nya metod kommer därför att få en mycket stor betydelse för molekylarfysiken och de resultat, som man redan uppnått vid jämförelse mellan Ramanlinjerna och de ultraröda absorptionsbanden äro mycket vackra. Den kemiska konstitutionen hos ett ämne återspeglas uti Ramanlinjernas intensitet och frekvens.

Fil. d:r BRUNO ROLFs redogörelse om den högre atmosfärens utforskande är rik på revolutionerande uppslag och ändrar fullständigt den gamla föreställningen om den högre

atmosfärens byggnad. Med tillhjälp av den gröna norrskenslinjen i natthimlens ljus har man mätt temperaturen 100-tals km över jordytan, och funnit den vara 666° under det att man förr trodde, att där uppe rådde en köld på — 270°. Att närvaron av rikligt med ioner i de högre luftlagren är nödvändig för att förklara norrskenet och radiostrålarnas återkastning till jorden, visste man förut, men att det existerar en hel serie elektriskt ledande »heavisideskikt» på olika höjd från 100 km ända upp till 1 600 km fick man en föreställning om först genom studiet av radiovågornas krokvägar, och genom de trådlösa signalernas interferens och radioekon.

Genom doc. E. RUDBERGs trevligt och klart skrivna redogörelse för Comptoneffekten får man ett typiskt exempel på hur studiet av en förbisedd detalj kan leda till viktiga upptäckter. Sedan länge har man vetat, att kroppar, som träffas av röntgenstrålar, själva utsända röntgenstrålar, vilket uppfattades som en spridning av den infallande strålningen. Det av COMPTON år 1922 publicerade arbetet visade dock det överraskande resultatet, att strö strålningen består av tvenne skilda komponenter, en av samma våglängd som den primära och en långvågig komponent, den »förskjutna linjen». Genom jämförelse mellan sekundärstrålningen från olika element, fann man, att avståndet mellan de båda linjerna var oberoende av substansen. Linjernas intensitet var däremot en funktion av elementets atomnummer. Man anser att denna egendomliga effekt uppkommer genom sammanstötning mellan ett strålningskvantum och en fri elektron. Av alldeles särskilt intresse är, att de senaste försöken visat, att lagen om energiens konstans äger giltighet vid denna stötprocess. BOHRs och KRAMERS' ansats att förneka energilagens giltighet vid den enskilda elementarprocessen är alltså tillbakavisad.

Av det sagda torde framgå, att 7:e bandet av KOSMOS är ovanligt innehållsrikt och behandlar de mest högaktuella spörsmålen inom fysiken. *C. Bergholm.*

HELGE HOLST og H. A. KRAMERS, *Bohrs Atomteori almenfattet. Anden ændrede og udvidede Udgave under Medvirkning af* O. KLEIN. Gyldendalske Boghandel, København 1929, 168 s., häft. kr. 6: 75.

HOLSTs och KRAMERS kända populära framställning från 1922 av Bohrs atomteori har nu utkommit i en ny upplaga, som på grund av kvantteorins snabba utveckling naturligtvis i mycket skiljer sig från den första. KRAMERS har ej medverkat i den nya upplagen på annat sätt än att den av honon 1928

utgivna holländska upplagan delvis lagts till grund. I stället har OSKAR KLEIN medarbetat och särskilt utformat två nytillkomna kapitel om kvantmekanik och vågmekanik.

Då boken är avsedd att kunna läsas så gott som utan matematiska och fysikaliska förkunskaper, omfattar dess förra hälft en utförlig och mycket populärt hållen redogörelse för de fysikaliska och kemiska fakta, som bilda förutsättningen för förståendet av den i bokens senare del framställda kvantteorin. Sålunda skildras atomteorins och elementbegreppets utveckling från antiken till våra dagar, ljusets vågteori samt Balmer-Ritz' och Rydbergs spektralformler, vidare elektron- och jonteorin, radioaktivitet, Rutherfords atommodell, isotopin och något om kärnfysik. Bokens senare del inledes med Plancks kvantteori samt Bohrs teori för väteatomens spektrum. Korrespondensprincipen och dess betydelse för beräkning av Rydbergskonstanten, spektrallinjers intensitet m. m. behandlas härefter; så kommer Sommerfelds teori för vätelinjernas finstruktur. I följande kapitel skildras fenomenen vid emission och absorption av ljus och sammanstötningar mellan elektroner och atomer samt tillämpas kvantteorin på nämnda fenomen. Teorins betydelse för förståendet av atomernas byggnad och periodiska systemet behandlas utförligt. I näst sista kapitlet framställes Heisenbergs kvantmekanik och antydes Diracs utvidgning därav, i vilken den kommutativa lagen ej gäller. Sist kommer Einsteins ljuskvantteori med dess experimentella bekräftelse genom de fotoelektriska fenomenen och Comptoneffekten, samt dess motstycke, de Broglies och Schrödingers teori om materievågor och dess bekräftelse genom interferensförsök med elektroner. Boken avslutas med en redogörelse för Bohrs åsikter om förhållandet mellan våg- och partikeluppfattningen av ljus och materia, Heisenbergs osäkerhetsrelation m. m. I ett tillägg ges siffervärden för en del fysikaliska konstanter och den matematiska härledningen av ett par formler.

Man måste säga, att författarna på det hela taget väl lyckats med sin uppgift att skriva en för vem som helst begriplig bok utan de alltför stora förenklingar av problemen, som äro vanliga i populära böcker. Framställningen är överallt klar och lättfattlig. Vid behandlingen av så svåra frågor som det här delvis rör sig om, är det dock trots den inledande kursen ej möjligt att gå mera på djupet utan endast att ge en allmän överblick av de experimentella resultaten, teorins grundtankar och viktigaste resultat.

De två sista, i och för sig synnerligen intressanta kapitlet. falla något utom den uppställda ramen, i det de torde fordra något större förkunskaper för att kunna förstås. Detta är

dock nödvändigt, ty de i dessa kapitel behandlade teorierna få ej populariseras alltför mycket, om överhuvudtaget något av innehållet skall finnas kvar.

Några detaljanmärkningar kunde dock göras. Det synes recensenten, som om en del av det historiska materialet i inledningen (t. ex. unitariska och dualistiska elektricitetsteorierna) med fördel kunde utgå till förmån för en fylligare framställning av själva huvudsaken. Några tryckfel och inadvertenser förekomma, vilka visserligen genast upptäckas av fackmannen men kunna verka förbryllande på icke sakkunniga läsare. Så får man t. ex. på sid. 54 den uppfattningen, att gränsen för en spektralserie är en verklig spektrallinje. På sid. 123 rad 2 står det atomer i stället för elektroner. Från första upplagan övertages (visserligen med reservation) en nu föråldrad plansch över en del atomers byggnad. Detta är emellertid som sagt, detaljer och hindrar ej, att boken kan rekommenderas till allmänt begagnande. *Sven Benner.*

J. S. HEDSTRÖM och EINAR ÖIJE, *Aritmetik och ekvationslära.* A. För femåriga realskolor och flickskolor. Svenska bokförlaget (Bonnier), Stockholm 1929, 228 sid., kart. kr. 4: 40 + facit à 25 öre.

C. RENDAHL-B. WAHLSTRÖM-K. FRANK, *Räknebok för realskolan.* Första delen A. För den femåriga realskolans två första klasser, 115 sid., kart. kr. 2: 55 + facit à 25 öre. Första delen B. För den fyraåriga realskolans första klass, pappersb. kr. 1: 50 + facit à 25 öre. Svenska bokförlaget (Norstedt), Stockholm 1929 och 1930.

I decembernumret för 1928 av denna tidskrift hade undertecknad tillfälle att säga några ord om HEDSTRÖM-ÖIJE, *Aritmetik och ekvationslära för 4-åriga realskolor.* Nu föreligger av denna bok en upplaga avsedd för de femåriga realskolorna, och en jämförelse erbjuder sig då osökt i vad förra hälften av arbetet angår med RENDAHL-WAHLSTRÖM-FRANK, *Räknebok för realskolan, första delen* (5 R: 1—2). Omfånget av de båda böckernas motsvarande delar är på ett ungefär detsamma, lärogången endast i någon mån avvikande. Om t. ex. icke dekadiska sorter tas före eller efter procenträkningen, kan ju vara likgiltigt, och läroboken kan ändå inte hindra läraren att göra som han själv vill. En något viktigare olikhet är kanske att R.-W.-F. före decimalbråk har en inledande kurs i allmänna bråk, under det att H.-Ö. väntar med de allmänna bråken, tills decimalbråk genomgåtts fullständigt. Det förra synes mig lyckligast ehuru kanske inte absolut nödvändigt;

jag har prövat båda metoderna. Yt- och rymdmått har man ju rätt att kräva att en elev, som söker in i 5: 1, skall kunna. R.-W.-F. behandlar också området som repetition redan i bokens början, ehuru rätt så utförligt. H.-Ö. väntar litet längre och behandlar det hela som alldeles nytt, och jag har för litet erfarenhet för att våga säga, om denna misstro till elevernas förkunskaper är berättigad. I varje fall tror jag inte man får någon svårighet med någondera boken på den punkten.

Båda böckerna äro ju skrivna av erfarna lärare; att de som exempelsamlingar skola vara rikhaltiga och välbyggda, har man rätt att vänta och blir ej heller besviken. Ur den synpunkten har jag intet att invända mot någondera boken.

Det som mest skiljer dessa båda arbeten torde vara vad jag skulle vilja kalla den pedagogiska detaljen. (En detalj behöver inte alltid vara oväsentlig.) När man skall införa ett nytt räknesätt, utföra en ny sorts räkneoperation, så behövs en förklaring. Man måste tala om vad man menar med t. ex. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ eller $\frac{5}{7} : \frac{2}{3}$ och likaså med exempel visa att räkningen behövs, att det inte bara är ett påfund för att göra ämnet svårare. På den punkten syns mig R.-W.-F. ha lyckats bättre än H.-Ö. När det talas om förlängning av bråk, konstaterar H.-Ö. efter ett par inledande exempel, att man tydligen har rätt att multiplicera täljare och nämnare med samma tal utan att värdet ändras. I R.-W.-F. påpekas klarare och distinktare att delarna bli mindre, antalet i motsvarande mån större. Vid genomgången av multiplikation i allm. bråk väntar man på en förklaring av vad som menas med $\frac{1}{2} \cdot 4$. H.-Ö. har väl en dylik förklaring, då det gäller decimalbråk, men säger intet, då det gäller de allm. bråken. I R.-W.-F. har man en tillfyllestgörande förklaring i båda fallen. (Vore det inte bättre att vid den slutliga sammanfattningen låta »av» och »gånger» byta plats i meningen: »Av är här det samma som gånger»?) Vid avkortning av decimalbråk beskriva båda böckerna *hur* det sker, endast R.-W.-F lämnar på rätt plats några förklaringar till *varför* det sker vid den ena eller andra decimalen. H.-Ö. avkortar med visst antal *decimaler,* R.-W.-F. med visst antal *siffror.* Det senare är givetvis bäst. Ett kapitel om beräkningars noggrannhet avslutar visserligen senare delen av H.-Ö., men det är fara värt att läraren av bekvämlighetsskäl sparar kapitlet — alldeles som boken gör. Jag tycker för min del, att R.-W.-F. kunde ha gjort ännu mer av saken. Att ange ytan av en kvadratisk platta med 1,75 dm sida som 3,0625 dm^2 utan reservation, anser jag för min del inte fullt korrekt. Betänk vad ett avläsningsfel på $\frac{1}{2}$ mm skulle betyda. Varför inte här, så som skett vid några andra

exempel, ge svaret i facit avkortat och därtill inom parentes för kontrollens skull lämna alla siffrorna?

Jag är i allmänhet fullt med på förklaringarna i R.-W.-F., och jag är tacksam att de finnas. Det är dock nödvändigt att lärjungarna, åtminstone då de börja ett nytt räknesätt, begripa vad de göra. Att räkningen sedan så småningom sker rent mekaniskt, spelar inte så stor roll, det är kanske tvärtom nödvändigt, men just det att man en gång på ett verkligt konkret sätt fattat räkningens innebörd, gör det sedan lättare att hålla själva förfaringssättet i minnet. Blott på en punkt vill jag anmäla min reservation mot R.-W-F., nämligen i fråga om division i allm. bråk. (H.-Ö. har här godhetsfullt överlåtit all förklaring åt läraren.) Att utföra räkningen $\frac{6}{7} : 3$, det går nog bra (delningsdivision). Men att sedan helt plötsligt säga »Vi vilja så beräkna $5 : \frac{2}{3}$» är väl inte fullt lämpligt. Här är det väl ändå inte fråga om delning. Och ändå svårare blir det att »på liknande sätt» förstå vad som menas med $\frac{5}{7} : \frac{2}{3}$. Hade det inte varit lämpligt att så som skett vid division i decimalbråk definiera räkningen som en omvänd multiplikation t. ex. genom ett konkret exempel: En rektangulär yta är $\frac{5}{7}$ m^2 och en sida $\frac{2}{3}$ m. Hur stor är den andra sidan? Då förstår man, vad saken egentligen gäller.

H.-Ö.:s senare del har jag mindre anledning att beröra. Den är i det hela lik motsvarande avsnitt av den ovan omnämnda förut behandlade delen av den för fyrårig realskola utkomna upplagan. Det nyss omnämda kapitlet »Om beräkningars noggrannhet» har tillkommit och några välbehövliga planimetriska och rymdgeometriska figurer äro också nya.

Av R.-W.-F. föreligger samtidigt en upplaga avsedd för fyrårig realskolas första klass med aritmetikkursen avkortad och ekvationsläran något utökad. Angående omfånget törs undertecknad inte yttra sig. Nog förefaller aritmetikkursen rätt så rundligt tilltagen, men förmodligen kommer den repeterande delen av kursen i denna klass att få läggas rätt så olika på olika håll, och då är det bättre med för stort material än för litet.

R.-W.-F.:s senare del — ty en första del har väl minst en senare del i följe? — väntas med intresse åtminstone av undertecknad, som måste karakterisera den nu utkomna delen som ett mycket förtjänstfullt arbete. *Bengt E. Nyström.*

K. R. Collin, *Lärobok i plan trigonometri.* Omarbetad av Sven Em. Ohlon. A. V. Carlsons förlag, Stockholm 1929. För realgymnasier och liknande läroanstalter, 133 sid., kr. 3: 50. För latingymnasier och folkskoleseminarier, 60 sid., kr. 2: —.

Collins lärobok i trigonometri hör till den typ av läroböcker, där man först får lära sig en sak relativt grundligt, och sedan får man veta, vad det hela egentligen tjänar till. En nyare tid har tyckt att de två momenten i kunskapen borde komma samtidigt. Själv har jag alltid omedelbart efter de trigonometriska funktionernas definierande — för enbart spetsiga vinklar — övergått till att solvera rätvinkliga trianglar, och så har jag trott, att alla människor gjorde. Ingen definition, förr än den behövs, intet nytt begrepp, förr än man kan visa dess nödvändighet, det har alltid tyckts mig vara en sund pedagogisk regel. I denna bok börjar inte solveringen av rätvinkliga trianglar förr än på sid. 18, och förut ha eleverna fått lära sig ej blott definitioner på sinus, cosinus och tangent för trubbiga vinklar jämte sambanden $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ och $\frac{\sin v}{\cos v} = \operatorname{tg} v$ utan t. o. m. fått lösa enkla trigonometriska ekvationer.

Triangelteoremen genomgås på vedertaget sätt, och så kommer en systematiserande framställning, de 4 »triangelhändelserna», som väckte minnen från min egen gymnasietid. Som lärare har jag aldrig använt och aldrig känt mig behöva denna uppdelning. Jag har ofta undrat, vem som hittat på numren. Varför inte följa kongruensfallens nummer?

Additions- och subtraktionsteoremen visas med de s. k. projektionssatserna, en metod, som nog lever kvar på sina håll och kanske kan ha sitt intresse.

Boken, som säkerligen var en god bok på sin tid, har nu ansetts förtjäna en omarbetning, verkställd av lektor OHLON. Först och främst ha exempel och facit lämpats efter 4-ställiga tabeller och även i övrigt har en lätt överarbetning ägt rum. Logaritmer ha införts tidigare än förut, figurerna ha blivit flera och bättre, diagram ha medtagits, några exempel ha tagits bort och en del nya tillkommit. Moivres teorem har förvisats till exemplen — ett säkerligen lyckligt grepp — och ett par nya kapitel ha tillkommit, t. ex. om centesimalsystemet och om maxima och minima. Det senare är kanske mindre behövligt. Den saken blir ändå nödvändig att ta upp senare, i samband med deriveringen, då man ju måste påpeka, hurusom detta nya vapen liksom alla andra ej bör användas i onödan.

En förkortad upplaga för latinare och seminarister har utkommit samtidigt.

Bengt E. Nyström.

JULIUS KÖRNER, *Elektriska motorer och motoranläggningar.* Praktisk handbok. P. A. Norstedt & Söner, Stockholm 1928, 358 sid., kr. 11:—.

Ifrågavarande handbok är uppdelad i fem huvudavdelningar, vilka i tur och ordning behandla allmänna elektriska grundlagar, motorers allmänna egenskaper, elektromotorisk drift, elektriska motoranläggningar samt förordningar och föreskrifter. I de fyra första avdelningarna är texten illustrerad med väl valt bildmaterial och belyst med tabeller och räkneexempel. I den sista avdelningen har gjorts ett lämpligt urval av gällande förordningar, föreskrifter och normer av huvudsakligen tekniskt innehåll.

Boken är i främsta rummet en rent praktisk handbok för dem, som i sin dagliga gärning ha att syssla med motorer och motoranläggningar. Den är således huvudsakligen lämpad för driftsingenjörer, maskinister, installatörer och montörer. Som en nödvändig konsekvens härav är den även av stort värde för dem, som ägna sig åt undervisning i praktisk elektroteknik. Den mera vetenskapliga behandlingen av motordriftens problem har samme författare framlagt i ett annat arbete, *Tillämpad motorteknik och elektrisk bandrift*, som utkommit på Bonniers förlag i serien »De tekniska vetenskaperna». *Nils Åkesson.*

E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, 2. Aufl., Springer, Berlin, 1929, 122 sid. RM. 9: 60.

Detta för alla, som sysslat med funktionsteori, välbekanta arbete har utkommit i en ny upplaga. Framställningen rörande en potensseries förhållande på periferien och dess analytiska fortsättning är på åtskilliga punkter omarbetad och utvidgad. Ett tillägg är exempelvis Fatous sats angående randvärdena. Vidare ha senare undersökningar om Picards sats och hithörande frågor möjliggjort en ny framställning. Detsamma gäller de behandlade frågorna rörande konform avbildning.

Boken är nu som tidigare en förstklassig lärobok, som — trots sitt ringa omfång och trots de ringa förkunskaper den förutsätter — bringar läsaren i kontakt med icke så få aktuella delar av funktionsteorin.

Gradualavhandlingar.[1]

ARNE ÖLANDER, *Studien über Brombernsteinssäure* (Z. physikal. Chemie Abt. A, Bd 144, S. 49—133, Leipzig 1929). Disputation vid Stockholms Högskola den 4 nov. 1929. Opponenter: doc. ERIK RUDBERG och prof. BROR HOLMBERG; extra opponent: prof. H. v. EULER.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande författares egen hand.

I avhandlingens första del ger förf. en förbättring av metoden att bestämma fumarsyra vid närvaro av äppelsyra genom utfällning som merkurosalt ur starkt sur lösning. — Grunderna för den elektrometriska bestämningen av väteionsaktiviteter kritiseras; med hjälp av i litteraturen förefintliga värden på aktivitetskoefficienter uppskattas pH i lösningen 0,01 n HCl + + 0,09 n KCl till 2,093. — Till följd av olikheten mellan aktivitetskoefficienter och ledningsförmågekoefficienter måste elektrolytiska dissociationskonstanter, bestämda ur ledningsförmågor, underkastas en korrektion. — Förf. påpekar, att LEWIS' och RANDALLS goda värden på vattnets ionprodukt synas vara för litet beaktade.

Genom elektrometriska mätningar bestämmas dissociationskonstanterna K_1 och K_2 hos bärnstenssyra, K_1 hos brombärnstenssyra, ättiksyra och ftalsyra samt K_2 hos svavelsyra. K_2 hos brombärnstenssyran bestämmes däremot ur dess sönderfallshastighet vid olika surhetsgrad hos lösningen. Därjämte ge dessa mätningar aktivitetskoefficienterna för några av de nämnda syrornas anioner vid olika ionstyrkor.

I avhandlingens andra del studeras brombärnstenssyrans bromavspjälkning kvantitativt. Den icke ioniserade syran är stabil, medan den dubbelt ioniserade i vattenlösning avspjälkar brom under bildning av äppelsyrans β-lakton:

$$\overline{O}CO \cdot CH_2CHBr \cdot COO^- = \begin{matrix} CH_2CH \cdot COO^- \\ | \quad | \\ CO \cdot O \end{matrix} + Br^-$$

Av de två olika enkelt ioniserade molekylslagen undergår sannolikt blott den ena samma reaktion:

$$\overline{O}CO \cdot CH_2CHBr \cdot COOH = \begin{matrix} CH_2CH \cdot COOH \\ | \quad | \\ CO \cdot O \end{matrix} + Br^-$$

medan den i andra ändan ioniserade molekylen troligen är stabil. Därjämte reagerar den sekundära ionen med hydroxylioner, varvid utom bromidion fumarationer bildas:

$$\overline{O}CO \cdot CH_2CHBr \cdot COO^- + OH^- = \overline{O}CO \cdot CH = CH \cdot COO^- + Br^- + H_2O$$

Hastigheten av denna reaktion är kraftigt beroende av vilka joner som finnas närvarande i lösningen och dessas koncentrationer (primär kinetisk salteffekt).

Medan acetättiksyrans och acetacetationens kolsyreavspjälkning under bildning av aceton:

$$CH_3COCH_2 \cdot COOH = CH_3COCH_3 + CO_2$$
$$CH_3COCH_2 \cdot COO^- + H_2O = CH_3COCH_3 + HCO_3^-$$

sker monomolekulärt, är den s. k. syrespjälkningen en bimolekulär reaktion mellan sekundära acetacetationer och hydroxylioner, varvid reaktionshastigheten kraftigt varierar med de närvarande ionernas (art och) koncentration. Reaktionsformeln blir:

$$CH_3CO^- = CH \cdot COO^- + OH^- + H_2O = CH_3COO^- + \\ + CH_3COO^- + OH^-$$

Enär hydroxylionerna regenereras, är reaktionen att rubricera som en baskatalys.

Reaktionen fumarsyra + vatten = äppelsyra går i båda riktningarna ytterst långsamt.

Den ovan nämnda laktonäppelsyran hydrolyseras i vattenlösning till äppelsyra. Enligt ovanstående skulle då brombärnstenssyran i sur och neutral lösning blott ge äppelsyra som slutprodukt. Så är även fallet i utspädda lösningar. Men i koncentrerade inverkar laktonäppelsyrans förmåga att addera allehanda anioner under bildning av substituerade bärnstenssyror. Sannolikt bildas den under dessa förhållanden uppstående fumarsyran över någon sådan additionsprodukt.

I avhandlingens sista del härledes på teoretisk väg en formel för reaktionshastigheter i lösningar, vilken sedan jämföres med några experimentellt undersökta fall.

C. E. SJÖSTEDT, *(α, β)-Korrespondenzen, $\alpha, \beta \leqq 2$, auf elliptischen und hyperelliptischen Kurven*, Uppsala 1929. 130 sid. Disp. i Uppsala den 30 nov. 1929. Opponenter: docent O. STENSTRÖM och fil. mag. E. LUNELL.

I denna avhandling behandlas (1 , 1)-, (1 , 2)- och (2 , 2)-korrespondenser på algebraiska kurvor och speciellt på elliptiska och hyperelliptiska sådana. I avhandlingen arbetas uteslutande med algebraiskt-geometriska metoder, som lämna en åskådlig uppfattning om korrespondensernas struktur.

Enligt en bekant sats ur korrespondensteorien kunna på kurvor med allmänna modyler blott valenskorrespondenser förekomma. Likaledes är bekant, att (1 , 1)-korrespondenser av detta slag förekomma i mångfalden ∞^3 och ∞^1 på rationella resp. elliptiska kurvor, för släktet 2 förekommer en enda men för högre släkten i allmänhet inga. Det är blott på de hyperelliptiska kurvorna som en dylik (1 , 1)-korrespondens existerar, och den är där den enda i sitt slag. Singulära korrespondenser (utan valens) förekomma blott på kurvor med specialiserade modyler.

I den ifrågavarande avhandlingen lämnas först en översikt av (1 , 1)-korrespondenserna på elliptiska och hyperelliptiska kurvor. Särskilt behandlas de involutoriska korrespondenserna för användningar vid (2 , 2)-korrespondenserna, varvid också bestämmas de kurvor, på vilka korrespondensernas punktpar avbildas.

(1 , 2)-korrespondenserna behandlas helt kort; det visar sig nämligen, att dylika blott förekomma på tre elliptiska kurvor med speciell modyl.

Huvudändamålet för avhandlingen är en undersökning av (2 , 2)-korrespondenserna. Förf. finner, att valenskorrespondenser för allmänt släkte blott förekomma på hyperelliptiska och 3-gonala kurvor. De förra äro som bekant definierade genom existensen av en g_2^1, de senare åter genom existensen av en g_3^1. En undersökning av mångfalden dylika korrespondenser ger vid handen, att på allmänna kurvor av släktena 0, 1, 2, 3 och 4 finnas ∞^8, ∞^5, ∞^3, ∞^1 resp. 2 korrespondenser, men att för högre släkten inga förekomma. Denna sats om (2 , 2)-korrespondenser kan ställas vid sidan av den ovan anförda bekanta satsen av samma natur rörande (1 , 1)-korrespondenser.

Förf. finner nu vidare, att vid (2 , 2)-korrespondenser de ingående punkterna i allmänhet äro inordnade i ändliga perioder; vid dessa korrespondenser höra ett ändligt antal punkter samman. Det enda undantaget härifrån utgöra elliptiska kurvor, om korrespondensen sönderfaller i en summa av två (1 , 1)-korrespondenser

Vid en (2 , 2)-korrespondens med n sammanhörande punkter kan man för varje divisor n' i n bestämma korrespondenser med n' sammanhörande punkter. Härigenom kan man på visst sätt sönderlägga (2 , 2)-korrespondensen i enklare beståndsdelar, närmast att jämföra med undergrupper i gruppteorien. Detta är av en viss betydelse för inblicken i korrespondensernas struktur.

Genom att man betraktar den RIEMANNska yta, som bestämmes av de i en (2 , 2)-korrespondens varandra motsvarande punktparen, erhållas mellan denna enkelt oändliga algebraiska bildning (kurva), i avhandlingen benämnd Σ, och den kurva, på vilken korrespondensen förekommer, tvenne (2 , 1)-korrespondenser, och på Σ erhållas tvenne involutoriska (1 , 1)-korrespondenser, som generera en diedergrupp G_n, om n punkter höra samman vid (2 , 2)-korrespondensen. Man erhåller härigenom en metod att uppvisa existensen av (2 , 2)-korrespondenser.

De singulära (2 , 2)-korrespondenserna, som alltså sakna valens, behandlas detaljerat vid de hyperelliptiska kurvorna. Om kurvans släkte är p och korrespondensen har $2n$ sammanhörande punkter, så är n faktor i $2p-1$, $p-1$, $4p$, $2p+2$ eller $4p+2$.

För släktena 1 och 2 genomföres undersökningen fullständigt; alla typer av här existerande (2 , 2)-korrespondenser bestämmas. Vid de elliptiska kurvorna bestämmas även modylerna för de kurvor, på vilka de singulära korrespondenserna förekomma, dels medelst kurvan Σ, dels medelst en elementär projektivt geometrisk metod.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska Kemistsamfundet, vars medlemmar erhålla tidskriften, 12 häften, mot erläggande av årsavgiften till Samfundet, kr. 12: —.

Ur innehållet i n:r 11 av årg. XLI, 1929. B. HOLMBERG, Xantogenatbildning i vattenlösning. — H. VON EULER und E. BRUNIUS, Reinigungsversuche an einem hämolytischen Amboceptor. — Referat och översikter. — N:r 12 av samma årgång. K. JOSEPHSON, Nobelpriset i kemi för 1929. — Referat och översikter. — Årgång XLII, n:r 1. S. ODÉN, Sedimentationsanalysen och dess tillämpning på kemiska, agrikulturkemiska och tekniska problem. — K. JOSEPHSON, Zur Bezeichnung der verschiedenen ringisomeren Glucoseformen als α-Zucker oder β-Zucker. — Referat och översikter. — I alla numren: Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Populär astronomisk tidskrift. Utgiven av Svenska Astronomiska Sällskapet. Årg. X, 1929, dubbelhäfte 3 och 4. Per år genom bokhandeln kr. 16: —, genom posten kr. 15: —; tidskriften kan även erhållas genom medlemskap i sällskapet (årsavgift kr. 15: —), adress: Box 745, Stockholm.

Ur innehållet. H. PETERSSON, Astrologiska betraktelsesätt och metoder. — Å. WALLENQUIST, Fotografiska observationer av variabla stjärnor. — H. VON ZEIPEL, Om solens och stjärnornas utveckling. — C. V. L. CHARLIER, Miss LEAVITTs formel. — K. G. MALMQUIST, Stjärnfördelningen vinkelrätt mot Vintergatan. — Svenska Astronomiska Sällskapet 10 år. — Flera intressanta notiser och recensioner.

Vetenskapen och livet. Årg. XIV, 1929, häft. 11—12. Hugo Geber.

Ur innehållet i n:r 11. Kosmiska smältdeglar. — Radions utveckling år 1929. — Relativitetsteorien. — De elektriska måttenheterna. Ur n:r 12. Glastillverkning. — Aktuella problem i den nutida kemiska industrien. — Vår kunskap om stjärnhimlen har vidgats genom nya instrument och metoder. — Rörelsens relativitet. — Atlantflygningarna och väderlekstjänsten. — Förbränningens kemi.

I och med den nu avslutade årg. upphör tidskriften att utkomma från Hugo Gebers förlag. Om någon annan förläggare kommer att övertaga utgivandet är ännu ovisst.

Industritidningen Norden. Årg. 1929, häft. 48—52; årg. 1930, häft. 1—8. Med varje nummer följer som bilaga »Svensk tidskrift för industriellt rättsskydd. Utkommer varje helgfri onsdag; per år kr. 12: —.

Ur innehållet. Ingenjören och kulturutvecklingen. — Som ingenjöremigrant i U. S. A. (forts.). — Glaserade Pantohm-motstånd. — Ingenjörsvetenskapsakademiens årshögtid 1929. — Chalmers Tekniska Instituts sekeljubileum. — AGA-spisen. — Aluminium inom skeppsbyggnadsindustrien. — Nya flygplansformer och riktlinjer inom flygmaskinsbygget. — Fysiologiskkemisk forskning. — Industrien och olycksfallen. — Strömomformare enl. Dahlgren. — Fredriksbergs koppargruva i Småland. — FREDRIK LILJEHÖÖK, In memoriam. — Översikt av tekniska nyheter. — PAWLIKOWSKIs motor för fasta pulverformiga bränslen. — Om Tekniska Museet. — Lättmetallen Elektron, teknikens lättaste råmaterial.

Era. Årg. 1929, häft. 12, 1930, häft. 1 o. 2. Per år kr. 5: —. Organ för Föreningen för elektricitetens rationella användning, vilken som medlemmar räknar: Svenska Elektricitetsverksföreningen, Sveriges Elektroindustriförening, Elektriska Engrossistföreningen, Elektriska Entreprenörsföreningen, Svenska föreningen för Ljuskultur.

Ur innehållet i n:r 12. De elektriska kokapparaternas utveckling. — Barnens elektriska uppfostran (med bl. a. intressanta upplysningar från Holland ang. en fruktbärande samverkan mellan elektricitetsverksorganisationen och lärarna). — En modern dammsugare (Elektrolux). — Mineraloljan inom elektrotekniken. — Tekniska nyheter. Ur n:r 1. Internationella elektriska kommissionen. — Vätgaskylning vid elektriska maskiner. — Elektrisk spis från Asea. — Nya tyska kokapparater m. m. Ur n:r 2. Pulviskopplingens egenskaper. — Standardisering av glödlampor. — »Gasekvivalenten», prov med gas och elektricitet vid matlagning.

Radioamatören. Årg. VI, häft. 12, årg. VII, 1929, häft. 1 o. 2. Per år kr. 6: —.

Ur innehållet. Mätningar med radioamatörens universalinstrument. — Moderna storstationer för radiotelegrafering. — En rörvoltmeter för växelströmsanslutning. — En fotoelektrisk förstärkare. — Utvecklingstendenserna inom mottagartekniken. — Mottagare för såväl lik- som växelström. — Om vågfällor för rundradio. — Om synkrondrift av rundradiostationer.

Radio och Grammofon. Årg. VII, häft. 20—24. Årg. VIII, häft. 1 o. 2. Per år kr. 7: 50.

Ur innehållet. Noctovisorn. — Grammofonförstärkarens nätanslutningsproblem. — Kopparlikriktaren. — Ny mottagare för bildöverföring. — Rationell högfrekvensförstärkning. —

Rammottagare för likström. — Kortvågsförsök på 10 à 20 cm. — Studioteknik på kontinenten. — Beskrivningar på ett stort antal tekniska nyheter.

Matematisk Tidsskrift. Udgivet af Matematisk Forening i København. Aarg. 1929, 4 Hefte. Per år kr. 15: —; endast avd. A. kr. 8: —.

Ur innehållet i avd. **A**. H. CHR. ESPENSEN, Konstruktioner ved ækvidistante Paralleler. — A. S. BANG, En geometrisk Sætning. — FR. FABRICIUS-BJERRE, Om simpel og sammensat rentesregning i brudne terminer. — Litteraturanmeldelser. — Udenlandske Tidsskrifter. — Danske Eksamensopgaver, Opgaver til Løsning og til Undervisningsbrug. Ur avd. **B**. B. JESSEN, Om Delingslighed for maalelige Punktmængder. — FR. FABRICIUS-BJERRE, En antalgeometrisk metode og nogle anvendelser i analytisk rumgeometri.

Fysisk Tidsskrift. Udgivet af Selskabet for Naturlærens Udbredelse. København. Aarg. 27, 1929, dubbelhäfte. 4—5 o. häfte 6. Per årg. kr. 12: —.

Ur innehållet i n:r 4—5. Det 18. skandinaviske Naturforskermøde i København 26—31 August 1929. NIELS BOHR, Atomteorien og Grundprincipperne for Naturbeskrivelsen. — Dessutom smärre referat av flertalet föredrag inom sektionen för *fysik och astronomi* samt inom sektionen för *geofysik*. — Bokanmälningar. — Ur n:r 6. A. K. ERLANG, En Anvendelse af komplexe Tal paa Svingningsfænomener med Stød. — E. HOLM, En Øvelse over Snoningssvingninger. — K. B. MØNSTED, En simpel Metode til at anskueliggøre de relative Bevægelser paa Stjernehimlen. — A. MENZINGER, En Vandbarometer. — N. C. JENSEN, Et billigt nulgalvanometer. — C. M. HVORSLEV, Forsøg over Dielektricitetskonstant, Forsøg over Kapacitet og Selvinduktion. — Anmeldelser.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Organ for Norsk Matematisk Forening. 11 Årg. 1929, 4 hefte. Abonnement tegnes ved henvendelse til kaptein O. KALLAGER, Torvet 5, Oslo. Innland kr. 5: —, udland kr. 6: — per år.

Ur innehållet. CARL STØRMER, Abels opdagelser; En del nye oplysniger om Abel hentet fra gamle brever. — Anm. av utländsk matematisk litteratur. — Norska examensuppgifter.

Den høiere Skole. Organ for Filologenes og Realistenes Landsforening. Årg. 31, 1929, häft. 1—20, 624 sid. Abonnemang (6 kr. per år) genom *Steenske Forlags Tidsskriftsekspedisjon*, Kirkegt. 15, Oslo.

I årg. 1929 förekomma följ. artiklar av matematiskt-naturvetenskapligt innehåll: O. VIIG, Matematikkopgavene ved udsatt middelskoleexamen (n:r 9). — O. VALEUR, En fysikkopgave (n:r 9). — SVERRE BRUUN, Et besøg på statsskolen i Horsens (n:r 12). — R. KREKLING, Et skoleeksperiment (Forholdet mellem det elektrostatiske og elektromagnetiske strømmål; n:r 14). — A. NÆSS, Løsning av trianglar ved et nomogram over sinus-satsen (n:r 14). — C. GØRBITZ, Landolts forsøk med jodsyre og svovlsyrling (n:r 18). — S. ESKELAND, Litt mekanikk.

Kataloger m. m.

Förteckning över godkända och underkända eldsläckningsapparater. Cirkulär N:o 18 (juli 1928) från Statens provningsanstalt i Stockholm.

Av största vikt är att varje skola och särskilt dess laboratorier förses med ändamålsenlig eldsläckningsapparatur. En nyligen timad olycka har ånyo riktat uppmärksamheten härpå. Många apparater av varierande typ föras i marknaden. Nämnda förteckning anger förefintliga huvudtyper och deras användningsområden och är en värdefull rådgivare för den som skall anskaffa brandsläckningsapparat. Förteckningen upptager typer, som prövats vid Statens provningsanstalt och som godkänts av Svenska Brandtarifföreningen och Svenska Automobiltarifföreningen. Köparen torde observera, att »Apparater av godkända typer skola hava utseende och vara beskaffade i enlighet med provningsanstaltens intyg, vilka kunna företes av försäljarna, samt äro icke godkända för andra ändamål än de i tabellen angivna». — Ur tabellerna utläser man bl. a., att s. k. »klorvätskesläckare» ej få användas inomhus, där personer vistas. För övrigt hänvisas till förteckningen.

Hydraulisk press. En dylik, synnerligen effektiv kan man erhålla genom att aptera en vanlig hydraulisk oljedomkraft (finnes att tillgå hos försäljare av automobiltillbehör) i en lämplig ställning av trä eller järn. Styrkan kan ju demonstreras på många sätt; den bryter t. ex. ledigt tjocka trästavar —. En liten billig oljedomkraft lyftande 1500 kg. (Stadium J:r à kr. 35:—) saluföres av AMERIKANSKA GUMMI A.-B. i Stockholm; samma firma realiserar en äldre typ till kr. 20:—.

Skjutmotstånd. En synnerligen tilltalande typ »Reo-rörmotstånd» tillverkas av en berlinfirma, som i Stockholm representeras av ingenjör ERNST FLODMAN, Helgagatan 30.

Det konstruktivt nya är särskilt kontaktanordningen mellan löpskenan och löparen (rullföringen) och mellan denna och motståndstråden. Konstruktionen framgår av illustrationen å annonssidan före texten. — Man har inskränkt stommens metalldelar till ett minimum och speciellt sökt undvika magnetiskt material, varför det induktiva motståndet är mycket ringa. Till dessa fördelar kommer, att priset är synnerligen moderat. — Motstånden kunna även erhållas genom P. A. Norstedt & Söners Skolmateriellavdelning.

Termostapel. I en uppsats, som red. haft nöjet mottaga av fil. d:r HOLJER WITT, beskriver denne en av honom prövad, intressant metod för tillverkning av termostaplar utan lödställen. Dessa ställa sig billigare i tillverkningen än t. ex RUBENS' kända apparat och kunna inom kort erhållas från firman RUDOLPH GRAVE, Stockholm. Uppsatsen måste av utrymmesskäl stå över till juninumret.

Glaserade motstånd. Firman WUNDERLICH & KÖNIG, Berlin (repr. i Stockholm BIRGER CARLSON & Co, Regeringsgatan 46) fabricerar billiga fasta motstånd för mindre belastningar, 70 och 120 watt. Motståndstråden är lindad på ett rör av keramiskt gods och vid 1000° C överdragen med ett helt skyddande glasyrlager. En belastning, som uppvärmer motståndet till svag rödglödning skadar ej tråden. Motstånden finnas i olika storlekar, från 15 till 5000 ohm, och betinga ett pris av 2 à 3 kr. Tack vare sina små dimensioner — rörstommen mäter utvändigt 20 mm och invändigt 9,7 mm och längden är 175 mm eller 100 mm — äro de användbara till åtskilliga ändamål. Motståndet kan bl. a. tjänstgöra som »värmeugn» i det att man träder det över ett rör, man önskar uppvärma, t. ex. över ena skänkeln till ett U-rör, fyllt med svårflyktig vätska, varvid specifika viktsändringen vid uppvärmningen demonstreras enkelt och effektivt. Ett motstånd på 1500 ohm, som kopplades direkt på belysningsledningen (220 V), befanns lämpligt för detta ändamål.

Skolfilmapparater. Konkurrensen är stor på detta område, och den ena firman överträffar den andra i goda dylika apparater. Firman LIESEGANG, Berlin, har nu fört i marknaden ett par apparater, som synas fylla högt ställda anspråk, en större apparat »Mentor» för 1000 watt och en mindre »Prätor» för 500 watt. Den senare kostar kr. 850:—; vi hänvisa för övrigt till »Ny Undervisningsmateriell», n:r 3 från P. A. Norstedt & Söners Skolmateriellavdelning, vilket nyligen utkommit.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

373) Visa, att

$$299 - 18\sqrt{6} + 44\sqrt{3} - 156\sqrt{2}$$

är en jämn kvadrat *A. N. Zahl.*

374) Av de fyra skärningspunkterna mellan två parabler med vinkelräta axlar sammanfalla tre i A, den fjärde är B. Visa a) att AB går genom axlarnas skärningspunkt och där delas i förhållandet 1 : 3, b) att A är mittpunkten till det stycke av kurvornas gemensamma tangent i A, som ligger mellan axlarna. *X.*

375) I tetraedern $D(ABC)$ är $\angle ADB = \angle ADC = 90°$, $\angle BDC = v$ och alla tre kantvinklarna vid kanterna i planet ABC äro lika ($= \alpha$). Sök sambandet mellan α och v. *X.*

376) Att upprita en triangel, då man känner en av höjderna och de om- och inskrivna cirklarnas radier. *Iter.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.[2]

377) En fader omtalar sin gosses ålder. Av misstag råkar han emellertid omkasta år och månader, varigenom gossens angivna ålder blir dubbelt så stor som den verkliga och därutöver en dag. Hur gammal var gossen? (En månad = 30 dagar.)

Svar: 3 år, 7 månader och 29 dagar.

378) En person, som tillfrågades om namnet på en hans flicka, svarade: »Om bokstäverna utbytas mot de tal, som angiva deras ordningsplats i alfabetet, så är ordningstalens summa 59. Det första talet fördubblat, ökat med det andra tredubblat, är 39 större än det tredje tredubblat». Vad hette flickan? Svar: Rut.

379) Lös ekvationen

$$x^n \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{n \log x} = n^n .$$

Svar: $x_1 = n$, $x_2 = 0{,}1$

380) Om ${}^a\log x = p$ och ${}^b\log x = q$, beräkna ${}^{ab}\log x$.

Svar: $\dfrac{pq}{p+q}$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 377 och 378 äro insända av P. E. LUNDIN, Västervik; uppg. 379—389 av C. H.

381) I en aritmetisk serie om 5 termer är summan $= 5a$ och termernas produkt $= a^5$. Vilken är serien?

Svar: Differensen är antingen 0 eller $\pm \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

382) Bestäm alla de tresiffriga hela tal med olika stora siffror, där siffrornas briggska logaritmer bilda aritmetisk serie.

Svar: 124, 139, 248, 469 eller i omvänd ordning.

383) På sidan AB i kvadraten $ABCD$ uppritas en halvcirkel. Om från C eller D en tangent drages till cirkeln, avskäres en egyptisk triangel av kvadraten.

384) I en likbent triangel drages en rät linje från spetsen till en punkt på basen. Om denna linje delas i tre lika delar av den inskrivna cirkelns periferi, huru förhålla sig triangelns sidor? Svar: 9 : 9 : 10.

385) Ena vinkelspetsen i en liksidig triangel tages till centrum för en cirkel genom den inskrivna cirkelns medelpunkt. I vilket förhållande delas höjden av cirklarnas gemensamma korda?

Svar: 7 : 5.

386) Den längsta linje som från basens ena ändpunkt i en likbent triangel kan dragas till den inskrivna cirkeln är dubbelt så stor som den minsta räta linje, som kan dragas till periferin. Sök förhållandet mellan sidorna. Svar: 9 : 9 : 14.

387) Tangenterna från en punkt till en cirkel (radie $= r$) bilda 90° med varandra. Hur långt från centrum skall en rät linje dragas för att det mellan tangenterna belägna stycket skall delas i tre lika delar av cirkelns periferi?

Svar: Avståndet $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ eller $\frac{7r\sqrt{2}}{10}$.

388) I vilken av alla rätvinkliga trianglar med given hypotenusa är skillnaden mellan en katet och dess projektion på hypotenusan ett maximum?

Svar: Vinklarna äro 30°, 60° och 90°.

389) För vilket värde på a blir linjen $y = x + 3{,}5$ asymptot till kurvan $y = \frac{x^2 + 2ax - a^2}{x - 1{,}5\,a}$? Svar: $a = 1$.

390) I en triangel ABC är vinkeln $C = 60°$. Visa, att

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

391) En series n:te term är $4n^4 + 1$. Visa, att om man tager ut tre konsekutiva termer vilka som helst, så är produkten av den första och sista termen jämnt delbar med den mellersta.

392) På sträckan $AB = c$, som bas ritar man en likbent triangel ACB, vars vinklar väljas så, att en cirkel med sin

medelpunkt på AB och gående genom A, tangerar BC i C. Beräkna triangelns vinklar och cirkelns radie.

Svar: 30°, 30°, 120°. Radien $= \frac{c}{3}$.

393) På diametern AB $(= 2r)$ i en cirkel har man tagit en punkt D och på periferin en punkt C så, att $AC = AD$. Välj C så, att den likbenta triangeln ACD får så stor yta som möjligt och beräkna denna maximiytas storlek.

Svar: $\frac{4r^2\sqrt{3}}{9}$.

394) A är en punkt på bågen till det parabelsegment, som avskäres av parabelns parameter BD $(= 2\ p)$. Linjen AC skär BD i C under rät vinkel. Vilket är det största värde, som ytan av triangeln ABC kan antaga?

Svar: $\frac{8p^2}{27}$.

Lösningar till uppg. 337—340.

337) *Visa, att* $(n-1)\ \sin nx = 2\sum_{p=1}^{p=n-1} \sin px \cdot \cos (n-p)x$.

C. A. Mebius.

Addera den p:te och den $(n-p)$:te termen:

$$\sin px \cos (n-p)\ x + \sin (n-p)\ x \cos px = \sin nx.$$

Är n udda, innehåller serien $\frac{n-1}{2}$ dylika par och summan blir $\frac{n-1}{2} \cdot \sin nx$, varav satsens sanning inses. Är n jämnt, fås $\frac{n-2}{2}$ par med summan $\frac{n-2}{2} \cdot \sin nx$ samt dessutom mellersta termen

$$\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{nx}{2} = \frac{1}{2} \sin nx$$

Seriens summa blir således även nu $= \frac{n-1}{2} \sin nx$ och satsen gäller.

B—r.

Även löst *B. L., E. R., Ed S. Åke Pleijel.*

338) *På huru många olika sätt kunna två fientliga drottningar uppställas på ett schackbräde utan att stå i slag för varandra?*

Iter.

Om mittpunkten av det fält, där ena drottningen står, tänkes som origo, bli mittpunkterna i de av henne behärskade fälten punkterna med heltalskoordinater på axlarna och på linjerna

$y = x$ och $y = -x$. Brädets begränsning tänkes vara en kvadrat med sidan 8; dess sidor gå alltid mitt emellan två närliggande heltalspunkter.

Om först två av kvadratens sidor falla utefter linjerna $x = -\frac{1}{2}$ och $y = -\frac{1}{2}$, falla 22 dylika heltalspunkter inom kvadraten; antalet möjliga placeringar blir $64 - 22 = 42$. Förskjutes nu kvadraten $\parallel$ y-axeln sträckan 1 åt gången, bortgå för varje steg en punkt på $+ y$-axeln och en på linien $y = x$, men samtidigt tillkomma en punkt på $-y$-axeln och en på linjen $y = -x$. Så snart ena drottningen står på en av de $64 - 36 = 28$ yttersta rutorna, blir antalet fall alltså 42.

Ligga sidorna utefter linjerna $x = -\frac{3}{2}$ och $y = -\frac{3}{2}$, falla 24 heltalspunkter inom kvadraten; antalet fall blir 40, och liksom förut inses, att detsamma gäller för de $36 - 16 = 20$ näst yttersta rutorna.

För nästa grupp av $16 - 4 = 12$ rutor blir antalet fall 38, och för de 4 innersta blir det 36.

Hela antalet fall blir alltså $28 \cdot 42 + 20 \cdot 40 + 12 \cdot 38 + 4 \cdot 36 = 2576$.

Generalisering: Samma tankegång kunde användas för ett godtyckligt kvadratiskt bräde med $4n^2$ rutor. Antalet rutor i de olika ringarna blir, inifrån räknat $4; 4 \cdot 3; 4 \cdot 5; \ldots 4 \cdot (2n - 1)$ och antalet behärskade rutor i motsvarande fall $8n - 4; 8n - 6; 8n - 8; \ldots 8n - 4 - 2(n - 1)$. Antalet möjligheter blir således resp. $4(n-1)^2; 4(n-1)^2 + 2; 4(n-1)^2 + 4; \ldots 4(n-1)^2 + 2(n-1)$. Hela antalet möjligheter blir då

$$16(n-1)^2 \sum_{p=1}^{n}(2p-1) + 8\sum_{p=2}^{n}(p-1)(2p-1) =$$

$$= 16n^2(n-1)^2 + 8 \cdot \frac{n(n-1)(4n+1)}{6} =$$

$$= \frac{4n(n-1)(2n-1)(6n-1)}{3}.$$

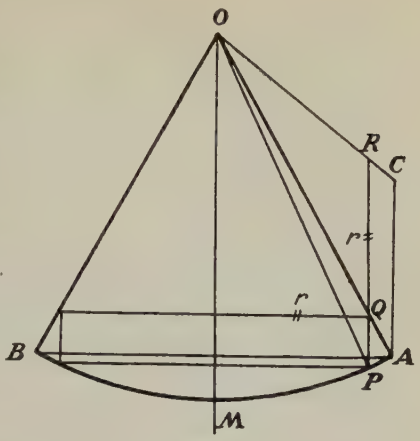
För $n = 4$ fås härur det förut funna värdet 2576. *B—r.*

Även löst av *B. L.*, *E. R.*

339) *Att i en given cirkelsektor inskriva en rektangel, som vid rotation kring sektorns symmetrilinje alstrar en cylinder med största möjliga totala yta.* *X.*

O är cirkelns medelpunkt, AB bågen, M bågens mittpunkt. Drag AC parallell och likriktad med MO och till längden = halva kordan AB. Bissektrisen till $\angle MOC$ råkar sektorns båge i

den sökta rektangelns ena hörn P, om $\angle AOB \gtrless 90°$. För $\angle AOB = 90°$ degenererar rektangeln i kordan AB dubbelt räknad. Betecknas nämligen basradien och höjden i den alstrade cylindern med r och h resp., så är totala ytan $2\pi r(r+h)$, och av figuren framgår genast, att denna yta är prop. mot rektangeln av P:s avstånd från OM och OC, då P genomlöper bågen. Max. inträder följaktligen, då P ligger på bissektrisen, såvida denna råkar sektorbågen. Härför kräves att $\angle AOM > \angle AOC$, men detta gäller för $\angle AOB \neq 90°$, enär $\angle AOM = \angle OAC$ och $OC > AC$.



Anm. För $\angle AOB = 180°$ får man $\angle MOP = 67°,5$; för centrivinklar $> 180°$ gäller visserligen konstr. oförändrad men begreppet »inskriven rektangel» måste då utvidgas. *X.*

Löst av *B—r, B. L., E. R., Ed S., Åke Pleijel.*

340) *F är brännpunkten till en parabel, S axelns skärningspunkt med styrlinjen. Sök excentriciteten för den ellips med foci i F och S, som skär parabeln under så liten (spetsig) vinkel som möjligt.* *X.*

Enär kurvtangenterna i en skärningspunkt P skola bilda minsta möjliga spetsiga vinkel, är detsamma fallet med kurvnormalerna i P. Men dessa normaler äro bissektriser till vinklarna SPF och FPD, där PD är parabeldiametern i P. Härav följer att den spetsiga vinkeln mellan PD och SP:s förlängning skall vara så stor som möjligt. Detta inträffar då SP tangerar parabeln. P faller då i parameterns ändpunkt, varvid $SF = FP$ och

$$e = \frac{SF}{PF + PS} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

Anm.: Den hyperbel med foci i F och S, som skär parabeln under så *stor* spetsig vinkel som möjligt, har likaledes ena parameterns ändpunkt gemensam med parabeln. Den har excentriciteten $= \sqrt{2} + 1$. *X.*

Även löst av *B—r, E. R., Ed S.*

Fysikaliska uppgifter.

Såsom fortsättning på den av lektor RAGNAR LUNDBLAD författade problemserien (se årg. XII, 1928—29, h. 1 o. 3; årg XIII, 1929—30, h. 1) följa här uppgifter inom följande områden: geostatik och elektrostatik (69—74); magnetism (75—78), kinematik (79—81); kraftekvationen (82—85), energiens former och förvandlingar (86—91), central- och pendelrörelse (92—95).

69. Ur en cirkulär, homogen och jämntjock skiva bortskäres ett kvadratiskt stycke, som har sitt ena hörn O i cirkelns medelpunkt och det diagonalt motsatta hörnet A på cirkelns periferi. Därefter upphänges skivan i en punkt B på periferien, så vald, att OB är vinkelrät mot OA. Huru stor vinkel bildar då OA med vertikalen?

70. På ett strävt lutande plan ligger ett 100 kg tungt föremål. Vid planets översta del finnes ett vindspel, vars vals har radien 1 dm och vars vevstake har längden 4 dm, räknat från vridningsaxeln. Vindspelets lina fästes vid föremålet på sådant sätt, att den blir parallell med planet. Det visar sig då, att en kraft om minst 21,5 kgf måste angripa i vevstakens ändpunkt, för att föremålet skall komma i rörelse uppför planet, och en kraft om minst 8,5 kgf, för att det ej skall glida utför planet. Beräkna friktionskoefficienten. Man kan bortse från friktionen i själva vindspelet.

71. Ett öppet cylindriskt litermått av tunn metallplåt har höjden 3 gånger så stor som basradien. Det är försett med ett skaft, bestående av ett rakt metallband, som är fastlött längs en generatris på sådant sätt, att nedersta änden är i jämnhöjd med bottnen, och som upptill är omböjt till en krok, vid vilken litermåttet kan upphängas. Vilken vinkel bildar därvid skaftet med vertikallinjen? Hela bandets längd är dubbelt så stor som litermåttets höjd och dess vikt tre gånger så stor som bottnens vikt. Vid räkningarna behöver ingen hänsyn tagas till bandets tjocklek, ej heller till att den översta delen är krökt.

72. En jämntjock plåt har formen av ett likbent parallelltrapets med höjden 2 m och de parallella sidorna resp. 1 och 3 m. Den uppreses mot en vertikal vägg, varvid den kortare av de parallella sidorna vilar mot golvet och den längre till hela sin längd mot väggen. Friktionskoefficienten är 0,8 såväl mot golvet som mot väggen. Vilken är den största vinkel plåten kan bilda med väggen utan att komma i glidning?

73. Två små flädermärgskulor äro upphängda i samma punkt med var sin tråd av längden 5 cm. De meddelas lika stor,

positivt elektrisk laddning (*e* elektrostatiska enheter) och göra då så stort utslag, att avståndet mellan dem blir 2 cm. Därefter föres en liten, isolerad, sfärisk konduktor, laddad med positiva elektricitetsmängden *E* enheter, rätt underifrån upp mot deras upphängningspunkt. När den befinner sig 2 cm under upphängningspunkten, ställa sig trådarna horisontellt. Sök förhållandet mellan *E* och *e*.

74. I en punkt på undersidan av en stor horisontell metallplatta, nära dess mitt, voro två likadana, små kulor upphängda i lika långa, isolerande trådar. Nedanför dem var en horisontell metallplatta av samma beskaffenhet som den övre plattan anbragt, så att kulorna befunno sig ungefär lika långt från båda plattorna. Kulorna meddelades lika stor positiv laddning, och båda plattorna avleddes till jorden. Vinkeln mellan trådarna blev då 18°,3. Därefter bröts den nedre plattans jordledning, och plattan uppladdades till en viss positiv potential. Vinkeln mellan trådarna steg då till 25°,1. Huru stor skulle vinkeln hava blivit, om i stället den nedre plattan avletts till jorden och den övre uppladdats till den förutnämnda potentialen? Den sökta vinkeln är ej större än att tangenten för halva vinkeln kan ersättas med sinus. Man kan bortse från de influensverkningar, som framkallas av kulornas laddningar.

75. I förlängningen av en rak horisontell elektromagnet är en liten deklinationsnål anbragt. När elektromagneten, som är fri från remanent magnetism, ej passeras av ström, utför nålen i det jordmagnetiska fältet 45 svängningar per minut. När elektromagneten passeras av en viss ström, förstärkes det jordmagnetiska fältet av spolens magnetfält (som bildar 40° vinkel med magnetiska meridianen), och antalet svängningar blir 65 per minut. Man vet, att jordmagnetismens horisontalintensitet är 0,134 gauss. Beräkna styrkan av spolens fält i den punkt, där nålen befinner sig.

76. Rätt ovanför en lättrörlig inklinationsnål är en stavformig elektromagnet anbragt med axeln vertikal och så högt, att inklinationsnålens längd kan försummas i förhållande till avståndet till elektromagneten. Från början genomflytes elektromagnetens lindning icke av någon ström, och inklinationsnålen är rörlig i ett plan, som är vinkelrätt mot det magnetiska meridianplanet. Om inklinationsnålen då rubbas ur sitt jämviktsläge, utför den små svängningar med ett visst svängningstal. Injusteras inklinationsnålen i det magnetiska meridianplanet och avpassas tillika strömstyrkan i elektromagneten till storlek och riktning på lämpligt sätt, så kan man ernå, att inklinationsnålen, som i sitt nya jämviktsläge bildar en spetsig vinkel med horisontalplanet

med nordändan nedåt liksom förut, om den rubbas, utför små svängningar med samma svängningstal som nyss. Beräkna nämnda vinkel. Inklinationsvinkeln å observationsorten är 48°,5. Man kan bortse från remanent magnetism i elektromagneten.

77. En inklinationsnål är försedd med en halvcirkelformig skala, som är graderad så, att gradstrecken 0° och 180° ligga i jämnhöjd med nålens axel och gradstrecket 90° lodrätt nedanför axeln. Med hjälp av nålen bestämmes inklinationsvinkeln på vanligt sätt och befinnes vara 74°,5. Därefter placeras nålen på ett lutande plan, vilket är så orienterat, att dess största lutning ligger i det magnetiska ost-västplanet. Injusteras inklinatoriet med sin gradskiva i detta plan, pekar nålen på gradstrecket 53°. Utan att det lutande planet rubbas, vrides inklinatoriet 90°, så att gradstrecket 0° kommer åt norr och gradstrecket 180° åt söder. På vilket gradstreck pekar då nålen?

78. Två raka vertikala ledningstrådar, vilka befinna sig på 5 längdenheters avstånd från varandra och kunna anses vara oändligt långa, passeras i samma riktning av elektrisk ström, 3 resp. 4 amp. stark. En liten deklinationsnål befinner sig på 4 längdenheters avstånd från den förra och 3 längdenheters avstånd från den senare strömmen. Jordmagnetismens inverkan antages vara upphävd, och nålen inställer sig under inflytande av strömmarnas magnetiska fält. Sök vinkeln mellan kompassnålens längdriktning och den normal, som från kompassen fälles mot den starkare strömmen.

79. En pojke har gått upp på taket och kastar en snöboll tvärsöver gatan, så att den träffar taket på huset mittemot. I vilken riktning och med vilken hastighet måste bollen kastas, för att den skall träffa taket vinkelrätt och i en punkt, som ligger lika högt som den punkt, där bollen lämnade pojkens hand? Avståndet mellan utgångspunkten och träffpunkten är 18 m och accelerationen vid fritt fall 9,82 m/sek^2. Taket, mot vilket bollen kastas, lutar 30° mot horisontalplanet.

80. Under elevationsvinkeln 40° utkastas från en kulle en projektil med hastigheten 400 m/sek i västlig riktning. Vid nedslaget träffar den ett tak, som lutar 35° i riktning från norr till söder, i en punkt, som ligger på samma höjd som den punkt, varifrån projektilen avsköts. Beräkna den mot taket vinkelräta hastighetskomposanten vid nedslaget under förutsättning, att luftmotståndet skulle kunna försummas.

81. En mur med rektangulärt tvärsnitt är 30 m hög och 10 m bred. Från en punkt på marken 40 m framför muren slungas en kropp i ett mot muren vinkelrätt vertikalplan med en hastighet av 40 m/sek. Sök den största och den minsta

elevationsvinkel kroppen kan givas, om den skall komma över muren. Accelerationen vid fritt fall är 10 m/sek². Luftmotståndet får försummas; så ock kroppens utsträckning.

82. Utför ett strävt lutande plan, vars lutningsvinkel är 30° och höjd 3 m, kastas en kropp med en viss begynnelsehastighet, och samtidigt får en annan kropp utan begynnelsehastighet falla lodrätt ned från planets översta punkt. Vilken skall den nämnda begynnelsehastigheten vara, om båda kropparna skola nå horisontalplanet genom det lutande planets bas med samma sluthastighet? Friktionskoefficienten är 1. Accelerationen vid fritt fall är 9,8 m/sek².

83. Vid översta punkten av ett strävt lutande plan är ett lättrörligt hjul anbragt. Över detsamma lägges ett snöre, vilket på ena sidan uppbär en vikt av 3 kg, som placeras på planet, och på andra sidan en motvikt. Den del av snöret, som befinner sig mellan kroppen och hjulet, är därvid parallell med planet, den del, som uppbär motvikten, vertikal. Kroppen, som från början är i stillhet, sätter sig i rörelse utför planet och tillryggalägger 2,45 dm under den första sekunden. Friktionskoefficienten mellan kroppen och planet är 0,8, planets lutningsvinkel 45°. Huru stor är motviktens massa i *C. G. S.*-enheter? Hjulets massa försummas, likaså friktionen i dess lager. Accelerationen vid fritt fall är 9,8 m/sek².

84. En kropp ligger på en vagnflake, vars rörelse på grund av vägens ojämnheter ömsom accelereras, ömsom retarderas på ett oregelbundet sätt. Vilken är den största retardation, som i något ögonblick får förekomma, om kroppen icke skall komma i rörelse utefter flaken? Vägen är en utförsbacke, som lutar 10° mot horisontalplanet. Friktionskoefficienten mellan flaken och kroppen är 0 75. Accelerationen vid det fria fallet är 9,8 m/sek².

85. Å en Atwoods fallmaskin har man på ena sidan hängt en vikt av 1,1 kg, på den andra en 60 gr tung vågskål, belastad med en kilogramvikt Huru mycket trycker vikten mot vågskålen, sedan systemet kommit i rörelse? Man kan bortse från hjulets massa och från friktionen.

86. En liten kula är upphängd i en 1,2 m lång tråd, vars vikt kan försummas. Genom en horisontell stöt bibringas kulan en så stor hastighet, att den beskriver en vertikal cirkel. Hur stor bör denna hastighet vara, för att kulans hastighet, när den befinner sig lodrätt över upphängningspunkten, skall vara hälften så stor som när den befinner sig lodrätt under upphängningspunkten? Accelerationen vid fritt fall är 9,82 m/sek².

87. Med utgångsenergien 20,75 kgm slungas en 3,5 kg tung kropp uppför ett glatt lutande plan, vars längd är 5 m och

lutningsvinkel 30°. Sedan kroppen lämnat planet, rör den sig fritt. Huru högt stiger kroppen, och vilken är dess hastighet i högsta läget? Accelerationen vid fritt fall är 9,8 m/sek^2.

88. Ett cylindriskt, i båda ändar tillslutet, 60 cm långt mässingsrör, vägande 650 gr, innehåller en 25 cm lång blycylinder med radien 2 cm och är för övrigt helt och hållet fyllt med olja, vägande 450 gr. Röret, som är skyddat mot värmeförluster till omgivningen, vändes 100 gånger, och för varje gång får blycylindern falla ned genom oljan. Därigenom stiger temperaturen 0°,72. Beräkna den mekaniska värmeekvivalenten. Sp.vikten för bly är 11,3 och för olja 0,9, sp.värmet för bly 0,031, för mässing 0,089 och för olja 0,45.

89. Vid åskväder kunna mycket stora elektriska spänningar uppstå i atmosfären. Vid ett tillfälle steg potentialen 132 000 volt för varje meter man höjde sig över jordytan. En regndroppe, laddad med elektricitetsmängden $1{,}1 \cdot 10^{-3}$ positiva elektrostatiska *C. G. S.*-enheter, befann sig 3 m över jordytan. Hur stor potentiell energi (i erg) hade den på grund av det elektriska fältet? En elektrostatisk *C. G. S.*-enhet elektricitet påverkas av kraften 1 dyn, när potentialfallet är 300 volt per cm.

90. I ett vågrätt homogent magnetfält av styrkan 10 gauss befinner sig en deklinationsnål, vars polstyrka är 16 *C. G. S.*-enheter. Avståndet mellan nålens poler är 8,5 cm, och den har inställt sig i kraftlinjernas riktning. Huru mycket arbete behöves för att vrida nålen så, att den blir vinkelrät mot kraftlinjerna?

91. På axeln av ett vattenhjul anbringas två likadana, parallellepipediska träklotsar, den ena ovanom, den andra nedom axeln; klotsarna äro förbundna med varandra genom skruvar med muttrar i vart och ett av de fyra hörnen. Vinkelrätt mot den övre klotsens ena vertikala sidoyta är en 1,5 kg tung stång fastgjord, så att den ligger i ett mot hjulaxeln vinkelrätt vertikalplan; vid stångens ända är en vågskål upphängd. Skruvarna åtdragas, så att friktion uppstår mellan klotsarna och axeln, och samtidigt belastas vågskålen med vikter. När vikterna och vågskålen tillsammans väga 37,5 kg, håller sig stången horisontell, medan vattenhjulet roterar med konstant hastighet. Huru stort arbete uträttar därvid vattenhjulet för varje omlopp? Avståndet från vågskålens upphängningspunkt till vertikalplanet genom rotationsaxeln är 80 cm, avståndet från stångens tyngdpunkt till samma vertikalplan 42 cm.

92. I den äldre atomteorien föreställde man sig, att en elektron i cirkulär bana omkretsar en väteatom. Elektronens massa är $9{,}02 \cdot 10^{-28}$ dess laddning $-4{,}77 \cdot 10^{-10}$ och dess banradie $0{,}532 \cdot 10^{-8}$, allt i *C. G. S.*-enheter. Väteatomens laddning

är lika stor som elektronens, men positiv. Huru stor är elektronens omloppstid? Från attraktionen mellan partiklarna på grund av den universella gravitationen kan bortses.

93. I en punkt P är en matematisk pendel av längden 75,8 cm upphängd. Den sättes i rörelse som konisk pendel och fullbordar därvid 100 omlopp på 2 min. 32 sek. Snöret avklippes vid upphängningspunkten, och kulan rör sig därefter fritt, tills den träffar golvet i en punkt N. Q är projektionen på golvet av punkten P. Beräkna avståndet QN, om $PQ = 1{,}83$ m. Från friktion bortses. Accelerationen vid fritt fall är 982 cm/sek^2.

94. En smal stav av 1 meters längd böjes i rät vinkel på en tredjedel av sin längd. I ändan av den längre delen fästes en liten kula och i ändan av den kortare delen en annan kula, vägande $^4/_5$ så mycket, varjämte en grund urborrning göres i staven på det ställe, där den är böjd. Systemet anbringas på en vertikal spets, som inskjutes i urborrningen, och försättes i rotation på sådant sätt, att kulorna beskriva horisontella cirklar. Därvid bildar den längre delen av staven vinkeln 35° med vertikalen. Beräkna systemets omloppstid! Accelerationen vid fritt fall är 980 cm/sek^2. Stavens massa kan försummas i jämförelse med kulornas.

95. En vagn rör sig utefter en cirkelbåge med 200 meters radie. Därunder ökas dess hastighet i banan likformigt från 0 m/sek. vid startpunkten till 10 m/sek. efter tillryggalagda 100 m. Angiv till storlek och riktning vagnens acceleration i det ögonblick, då den tillryggalagt 50 m.[1]

Resultat: **69.** 84°,59. **70.** 0,325. **71.** 9°,5. **72.** 68°,40. **73.** 95,63. **74.** 15°,5. **75.** 0,1633 gauss. **76.** 27°,79. **77.** 70°,85. **78.** 60°,64. **79.** 60°; 14,29 m/sek. **80.** 210,6 m/sek. **81.** Minst 45°; högst 79°,7. **82.** 10,09 m/sek. **83.** 261,2 gr. **84.** 5,54 m/sek^2. **85.** $1^1/_{54}$ kgf. **86.** 7,928 m/sek. **87.** Kroppen stiger $^6/_7$ m. över planets högsta punkt; dess hastighet i högsta läget är 7,099 m/sek. **88.** 428,7. **89.** 1,452 erg. **90.** 1360 erg. **91.** 192,4 kgm. **92.** $1{,}534 \cdot 10^{-16}$ sek. **93.** 114,6 cm. **94.** 2,026 sek. **95.** Accelerationen är 0,559 m/sek^2 och avviker från banans tangent 26°,56 i riktning inåt.

[1] Utom dessa uppgifter har lektor LUNDBLAD haft vänligheten ställa till red:s förfogande prisuppgifterna 1, 2, 4 och 6 å sid. 190.

Pristävlan.

Red. av *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* inbjuder härmed eleverna vid de högre allmänna läroverken och med dem likställda enskilda läroanstalter till en pristävlan. Det gäller att så fullständigt och vackert som möjligt lösa samtliga nedanstående sex fysikaliskt-matematiska uppgifter, vilka alla hålla sig inom realgymnasiets kurser.

Tävlingsskrift skall insändas till redaktionen, Karlbergsvägen 16^{IV}, Stockholm, senast den 1 juli innevarande år och vara försedd med vederbörande författares namn, ålder, skola, klass och bostadsadress. Framställningssättet bör vara klart. De uppställda ekvationerna böra motiveras och tydliga figurer bifogas.

Tävlingstiden är utsträckt så långt, för att de som av förberedelsen till studentexamen äro förhindrade att utföra arbetet i vår, må kunna göra det efter examen Berättigade att deltaga äro således även de i vår nyblivna studenterna.

Herrar lärare ombedjas godhetsfullt rikta sina elevers uppmärksamhet på denna tävlan. Särtryck av uppgifternas lydelse, att utdelas bland eleverna, kunna erhållas från redaktionen.

Red. mottager gärna *utom tävlan* lösningar även från andra än de ovan nämnda.

De bästa lösningarna belönas med pris av följande värde:

Första priset kronor 100:—
Andra » » 50:—
Tredje » » 35:—
Därjämte tre extrapris.

Första priset (skänkt av en av Tidskriftens gynnare) utgöres av en precisionshöjdmätare i läderfodral eller precisions-aneroidbarometer, »System Paulin». (Se sid. 156.)

Andra priset utgöres av ett bokverk, som vinnaren fritt får välja bland arbeten, utgivna å Albert Bonniers förlag.

Tredje priset är skänkt av P. A. Norstedt & Söners skolmateriellavdelning och består av ett cirkelbestick.

Extraprisen utgöras av *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi*, årg. 1930—31.

Uppgifter.

1. Två mycket små kulor, vilkas massor förhålla sig som 3 : 2, äro förenade med ett snöre. Snöret med kulorna hänges tvärs över en rät, cirkulär cylinder, vars axel är vågrät och vars radie är lika med snörets längd. Vilket läge intaga kulorna, när deras sammanlagda potentiella energi är störst?

2. I ett golv finnes en lucka, som är rörlig kring två gångjärn i ena långsidan. Bredvid luckan står en låda av parallellipipedisk form. En av dess kanter är parallell med luckans långsida, och dess höjd är så stor, att när luckan öppnas och lutas baköver, luckan med sin andra längskant kommer att luta mot en av lådans vertikala väggar. Det kan då inträffa, att lådan på grund av luckans tyngd skjutes undan. Alltefter luckans lutning mot golvet kan friktionen mellan lådan och luckan vara fullt utbildad eller ej, när denna glidning börjar. Finnes det någon lutningsvinkel, för vilken friktionen på båda ställena just är fullt utbildad? Luckans vikt är 10 kg, lådans 5 kg, friktionskoefficienten 0,5 såväl mellan lådan och golvet som mellan lådan och luckan.

3. Ett strävt horisontellt plan är genom en rät linje delad i två områden med olika friktionskoefficient, respektive c_1 och c_2. Man vill släpa en kropp från en punkt i det förra området till en punkt i det senare och därvid välja vägen så, att det erforderliga arbetet blir så litet som möjligt. Vilken väg skall man taga?

4. I en konisk pendel, bestående av en liten kula, som är upphängd i en viktslös, otänjbar tråd, bildar tråden 45° vinkel med lodlinjen. På grund av friktionen förlorar pendeln långsamt energi, och utslagsvinkeln minskas, tills kulan slutligen stannar lodrätt under upphängningspunkten. Den har då avgivit ett visst energibelopp till omgivningen. Huru stor är utslagsvinkeln, när pendeln avgivit *halva* det nyssnämnda energibeloppet, om pendelkulan även då kan anses beskriva en cirkel?

5. Ett kärl i form av en rak cylinder med en inre genomskärningsyta av 100,5 cm^2 är delvis fyllt med kvicksilver och placerad med sin axel vertikal. Från en punkt nära kärlets botten leder ett vertikalt rör — yttre genomskärningsyta 0,5 cm^2 — upp genom en urborrning i det tätt slutande locket. Röret är utanför kärlet ombockat och dess andra ända försedd med en kran, vars fina öppning befinner sig 20 cm under kvicksilverytan i kärlet. Den så bildade häverten är helt fylld med kvicksilver ända till den stängda kranen. Den i kärlet, ovan kvicksilvret instängda luften har vid ett tryck, som är 75 cm och lika med det yttre lufttrycket en volym av 0,5 liter. Hur stor volym kvicksilver rinner ut ur kärlet, då kranen öppnas? Temperaturen är hela tiden densamma.

6. En tangentbussol står på ett horisontellt bord men är ej injusterad i det magnetiska meridianplanet. Den visar ett utslag på 41°,3, när en viss ström passerar bussolen i den ena riktningen, men ett utslag på 28°,9, när strömmen omkastats. Huru stort bleve utslaget, om bussolen vore rätt injusterad?

Praktiska Atomvikter 1930.

Ag	Silver	107,880	Mo	Molybden	96,0
Al	Aluminium	26,97	N	Kväve	14,008
Ar	Argon	39,94	Na	Natrium	22,997
As	Arsenik	74,96	Nb	Niobium	93,5
Au	Guld	197,2	Nd	Neodym	144,27
B	Bor	10,82	Ne	Neon	20,18
Ba	Barium	137,36	Ni	Nickel	58,69
Be	Beryllium	9,02	**O**	**Syre**	**16,000**
Bi	Vismut	209,00	Os	Osmium	190,9
Br	Brom	79,916	P	Fosfor	31,02
C	Kol	12,000	Pb	Bly	207,21
Ca	Kalcium	40,07	Pd	Palladium	106,7
Cd	Kadmium	112,41	Pr	Praseodym	140,92
Ce	Cerium	140,13	Pt	Platina	195,23
Cl	Klor	35,457	Ra	Radium	225,97
Co	Kobolt	58,94	Rb	Rubidium	85,45
Cp	Cassiopeium	175,0	Re	Renium	188,7
Cr	Krom	52,01	Rh	Rodium	102,9
Cs	Cäsium	132,81	Ru	Rutenium	101,7
Cu	Koppar	63,57	S	Svavel	32,06
Dy	Dysprosium	162,46	Sb	Antimon	121,76
Em	Emanation	222	Sc	Skandium	45,10
Er	Erbium	167,64	Se	Selen	79,2
Eu	Europium	152,0	Si	Silicium	28,06
F	Fluor	19,00	Sm	Samarium	150,43
Fe	Järn	55,84	Sn	Tenn	118,70
Ga	Gallium	69,72	Sr	Strontium	87,63
Gd	Gadolinium	157,3	Ta	Tantal	181,5
Ge	Germanium	72,60	Tb	Terbium	159,2
H	Väte	1,0078	Te	Tellur	127,5
He	Helium	4,002	Th	Torium	232,12
Hf	Hafnium	178,6	Ti	Titan	47,90
Hg	Kvicksilver	200,61	Tl	Tallium	204,39
Ho	Holmium	163,5	Tu	Tulium	169,4
In	Indium	114,8	U	Uran	238,14
Ir	Iridium	193,1	V	Vanadium	50,95
J	Jod	126,93	W	Volfram	184,0
K	Kalium	39,104	X	Xenon	130,2
Kr	Krypton	82,9	Y	Yttrium	88,93
La	Lantan	138,90	Yb	Ytterbium	173,5
Li	Litium	6,940	Zn	Zink	65,38
Mg	Magnesium	24,32	Zr	Zirkonium	91,22
Mn	Mangan	54,93			

Anm. Gentemot 1929 års atomviktstabell visar detta års tabell som enda skillnad, att renium upptagits, sedan nu dess atomvikt blivit bestämd. Särtryck — på styvt papper — av ovanstående tabell kan erhållas hos redaktionen mot insändande av frimärken: 30 öre för *ett* ex. och 10 öre för varje ex. därutöver.

Sannolikhetsräkning på empirisk grundval.

Av EDVARD GÖRANSSON.

1. Inledning. Gauss' felfunktion.

Genom 1928 års undervisningsplan för de allmänna läroverken har sannolikhetsräkning införts såväl å latin- som å realgymnasiet. I en uppsats i Pedagogisk Tidskrift[1] har jag anfört vissa skäl, som tala mot upptagande av sannolikhetskalkyl på de allmänna läroverkens program. Bland annat anfördes, att i andra länder detta moment i gymnasiets kursplan med den av ålder vedertagna framställningen betraktades som en relikt, vars värde var mycket omtvistat. I vårt land hade, då det någon gång vid sekelskiftet väcktes på tal att införa sannolikhetskalkyl i undervisningen, erinrats om, att denna gren av vetenskapen ej ännu vunnit den fasthet, att man fått ett riktigt grepp på hur ämnet borde läggas samt att våra lärare icke haft tillfälle sätta sig in i ämnet.

Av pedagogisk litteratur, som välvilligt ställts till mitt förfogande av adjunkten C. E. Blom, har jag fått belägg för att enahanda synpunkter för närvarande göra sig gällande i andra länder. Så säger W. Lietzmann, en av Tysklands främsta matematikpedagoger,[2] att beträffande sannolikhetsräkningen faller det genast i ögonen, att mycket ringa överensstämmelse finnes mellan vetenskapen och den undervisning, som lämnas i skolorna. Man nöjer sig med det mål, som utstakas i undervisningsplanen, »inzwischen warten wir auf den Methodiker, der uns neue Wege zeigen mag». Under dessa förhållanden förefaller det mycket egendomligt, att detta moment införts första gången i de svenska skolorna

[1] E. Göransson, De allmänna läroverkens kursplaner i matematik, Pedagogisk Tidskrift 1930, sid. 38 ff.

[2] W. Lietzmann, Methodik des matematischen Unterrichts II, Leipzig, Quelle und Meyer, 1916, sid. 311.

år 1928 och att som enda skäl härför anförts,[1] att detta kursmoment förekommer i andra länder, t. ex. i Schweiz.

I förutnämnda uppsats betecknade jag undervisningsplanen som reaktionär, då den i matematikkursen upptagit ett område, som icke har något samband med den övriga kursen. Man gick tillbaka till 1800-talet, då sambandet mellan vissa delar av de allmänna läroverkens matematikkurs var mycket löst och värdet av vissa partier var i hög grad omtvistligt. Jag underkastade särskilt latinlinjens kursplan kritik. 1924 års skolsakkunniga upptogo matematik icke alls i kursplanen för det treåriga latingymnasiet och å det fyraåriga endast såtillvida, att studenten skulle hava inhämtat de kunskaper, som vitsordas av realexamen. Skolkommissionen tilldelade ämnet två timmar å latingymnasiet. Med den ställning, som ämnet erhållit i 1928 års kursplan, där ämnet i sin helhet eller en väsentlig del av detsamma ligger nere ett år för att sedermera återupptagas, vore det bättre att det alldeles utginge, än att den unge bibringas den förmodan, att han genom tillval av ämnet skulle kunna inhämta matematiska kunskaper av något egentligt värde. För ett ingjutande i latinlinjens matematikkurs av ett delvis annat innehåll talar Olof Josephson.[2] Man kan ock hänvisa till den litteratur, som uppstod i ämnet i Frankrike med anledning av 1902 års undervisningsprogram, och som var avsedd för classe de philosophie m. fl. Upptagandet av en kurs i sannolikhetsräkning syns i alla händelser illa överensstämma med den å lärarmötet i Göteborg hävdade meningen, att en fördjupning av studierna ej nödvändigt förutsätter ökat timantal på schemat utan kan åstadkommas genom mindre splittring av lärostoffet.[1]

Vad latingymnasiet beträffar, synes det mig uteslutet, att kursen i sannolikhetskalkyl skall kunna ge någon nämnvärd behållning. Den kommer endast att till ingen nytta minska

[1] Tjugufemte svenska läroverkslärarmötet i Göteborg 1929, anförande av undervisningsrådet Wallin.

[2] Olof Josephson, Några reflexioner beträffande latingymnasiets nya matematikkurser, Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi 1929—1930.

den tid, som så väl behövs för kursens övriga delar. Det vore därför välbetänkt att snarast gå i författning om att helt stryka sannolikhetskalkylen från latingymnasiets kursplan.

Vad realgymnasiet angår, ställer sig saken i viss mån något annorlunda och kan förtjäna att diskuteras. Här kanske det kan bli möjligt utforma en kurs, som kan lämna någon behållning. En undersökning av möjligheterna i den vägen borde ha gjorts, innan ämnet upptogs i kursplanen. En dylik fackligt-pedagogisk undersökning hade säkert lämnat det resultatet, att tiden ej ännu är mogen för detta nya moment. Nu kommer diskussionen i efterhand, vilket är en olycklig ordningsföljd. Denna uppsats avser att lämna ett bidrag till denna diskussion.

Först och främst gäller frågan kursens innehåll och metodiska utformning. Skolmyndigheterna ha här ej lämnat någon anvisning. Undersöker man den utkomna läroboks-litteraturen,[1] finner man, att innehållet rör sig om hasardspelets lagar, vilka genom exempel studeras. Den, som finner detta vara en absolut onyttig lek, får väl trösta sig med att skenbart onyttiga matematiska undersökningar ofta kunna erhålla en oanad betydelse, ehuru lärjungarnas matematiska ståndpunkt omöjliggör ett framträngande till eventuellt värdefulla tillämpningar.[2] I nyssnämnda läroböcker definieras sannolikhet aprioriskt som ett bråk, där täljaren är antalet gynnsamma fall och nämnaren totala antalet chanser. Vidare härledas ur definitionen satserna om summa och produkt av sannolikheter, vilka lärjungarna äro benägna att ständigt förväxla vid tillämpningar. Man

[1] RUBEN MATTSON, Lärobok i algebra för gymnasiet III, Stockholm, Norstedt, 1928; SVEN EM. OHLON, Kombinatorik och sannolikhetsräkning, Stockholm, Carlson, 1929; HJALMAR OLSON, Sannolikhetskalkylens första grunder, Stockholm, Norstedt, 1929; KARL ROOSWALL, Sannolikhetsräkning för gymnasier och övriga läroanstalter, Stockholm, Fritze 1929; GUSTAV ERIKSSON, Sannolikhetskalkyl för läroverken, Uppsala, Almqvist & Wiksell, 1928.

[2] K.-G. HAGSTRÖM, Talens vetenskap, Stockholm, Bonnier, utan tryckår, särskilt 19:e kapitlet, som handlar om sannolikhetskalkylen. Jfr ock LIETZMANN loc. cit. sid. 309, som säger: »Då det ges vuxna människor, som icke kunna spela kort, varför skall man ge lärjungen den föreställningen, att kännedom om kortspel är något, som tillhör allmänbildningen.»

brukar inprägla regeln: stå fallen i förhållandet »antingen — eller», då skall man addera, stå fallen i förhållandet »såväl — som också», då skola de multipliceras. Här öppnar sig ett fält för enkla men på samma gång förrädiska studentuppgifter.

De anförda författarna ha alltså i likhet med professor CRAMÉR[1] av pedagogiska skäl funnit lämpligast att anknyta framställningen till hasardspelsteorien, som historiskt sett gav första anledningen till sannolikhetskalkylens uppkomst. CRAMÉR anför ock, att den säkraste vägen att lära sig i djupare mening förstå en vetenskap torde vara att sätta sig in i den historiska utvecklingen. Emellertid måste häremot invändas, att man på den vägen utan en krävande matematisk apparat aldrig kan nå fram till några tillämpningar utöver teorin för lyckospel. För att detta skall vara möjligt, måste man känna till den normala sannolikhetskurvan, men LIETZMANN säger:[2] om den gausska felkurvan är i skolan intet tal. I allmänhet härledes det analytiska uttrycket för GAUSS' felfunktion med tillhjälp av satser, till vilka man kommer fram genom teorin för hasardspel, men detta tillvägagångssätt förutsätter avsevärt större insikter i matematik, än vad skolan kan bibringa.[3]

Dessa matematiska svårigheter äro orsaken till att så många, som i sin vetenskapliga eller praktiska gärning sysslat med t. ex. felberäkningar, eller andra sannolikhetskalkylens tillämpningar, aldrig satt sig in i teorin för dessa utan nöjt sig med att räkna med de färdiga formlerna utan att egentligen förstå deras innebörd.

Med anledning av vad jag i det föregående anfört om den klassiska metodens pedagogiska nackdelar uttalade jag i min meromnämnda uppsats i Pedagogisk Tidskrift, att det för min del syntes mera lämpligt att för nybörjaren införa sannolikheten *aposterioriskt* som ett frekvenstal, d. v.s. angivande av en händelses relativa inträffande i ett stort

[1] HARALD CRAMÉR, Sannolikhetskalkylen och några av dess användningar, Stockholm, Gjallarhornet 1926.
[2] Loc. cit. sid. 312. — [3] Se exempelvis CRAMÉR, loc. cit. sid. 44 ff.

antal fall, varvid man som utgångspunkt lämpligen ansluter sig till statistiken eller erfarenheten från laborationsförsök. Ett uttalande i denna riktning har gjorts av WESTERGAARD,[1] ehuru han icke själv följer denna metod. Vill man emellertid få en fylligare inblick i det förfaringssätt, jag tillåtit mig att förorda, bör man vända sina blickar från kontinenten till England, KARL PEARSON's hemland, den frejdade rasbiologen och en av grundläggarna av den moderna statistiken.

I ett arbete av NUNN[2] återfinnes ett värdefullt uppslag till ett införande av sannolikhetskalkylen på ett modernt sätt. I NUNNS framställning ingår probabilitetskalkyl som en tillämpning av vad som inhämtats i kapitlet »Statistics». NUNN börjar med att anföra en del exempel från olika områden av statistiken. Han tänker sig att lärjungarna få var sitt av dessa att bearbeta. Först uppgöras översiktliga tabeller och därefter övergår man till frekvenskurvor. De olika lärjungarnas arbeten sammanställas. Man finner att kurvan i vissa fall blir fullständigt symmetrisk, *normal frekvenskurva,* i andra fall asymmetrisk, *skev* eller *sned* frekvenskurva. I fortsättningen delgives eleverna en del av PEARSONS frekvenskurvor och de få genom räkning undersöka på vilken typ de nyss anförda exemplen kunna passas in. Det omnämnes,[3] att PEARSON har »by the laborious and elaborate analysis of many examples», visat upp att de frekvenskurvor, som möta i verkligheten, låta inordna sig i sju fullt åtskilda typer. En härledning av de analytiska uttrycken för dessa kurvor sättes icke i fråga. Mer ingående studeras den normala frekvenskurvan, men namnet GAUSS förekommer icke. I fortsättningen övergår författaren till tillämpningar, varibland må anföras sannolikhetsräkning och korrelation, alltså jämnt upp den motsatta ordningen mot den, som enligt vedertaget bruk hitintills tillämpats.

[1] HARALD WESTERGAARD, Statistikens Teori i Grundriss, Köpenhavn, C. E. C. Gad, 1915, sid. 113.

[2] T. PERCY NUNN, Ecercises in algebra, London, Longmans, Green and Co, 1914.

[3] Loc. cit. sid. 444.

Beträffande begreppet sannolikhet understryker NUNN,[1] att »the term *probability* should be taken to mean *relative frequency* and nothing else».

I det följande skall jag göra ett försök att finna ett analytiskt uttryck för felkurvan och därmed för den s. k. *normala sannolikhetsfunktionen* utan att använda den svåra och omständliga vägen med utgångspunkt från sannolikhetskalkylen. Av den erfarenhetsmässigt vunna föreställningen om kurvans utseende skall ekvationen för densamma härledas. Att detta tillvägagångssätt att utgå från felkurvans utseende som ett experimentellt faktum icke är alldeles förkastligt framgår av ett yttrande i POINCARÉS bekanta arbete »La science et l'hypothèse». Den ryktbare matematikern, som själv ingående sysslat med probabilitetskalkylen, säger: »Un physicien éminent me disait un jour à propos de la loi des erreurs: Tout le monde y croit fermement parce que les mathémaciens s'imaginent, que c'est un fait d'observation, et les observateurs que c'est un théorème de mathématique.» Andra matematici luta åt den meningen, att det första betraktelsesättet är det riktiga och att varje försök, som gjorts att bevisa de stora talens lag, är angripbart.[2]

Emellertid vill jag icke nöja mig med att framställa klockkurvans ekvation utan önskar att tillämpa den på något begränsat område, vartill jag ämnar återkomma i en senare uppsats.

De matematiska förutsättningarna för detta kapitel äro kännedom om integralbegreppet.[3]

Som utgångspunkt väljer jag erfarenheten från laborationsförsök, nämligen att olika försök ge olika värden på den konstant, som skall bestämmas.[4] Jag antager alltså, att man gör en grafisk framställning över avvikelser från medelvärdet av en del olika försöksserier, berörande olika

[1] Loc. cit. sid. 474. — [2] LIETZMANN, loc. cit. sid. 312.

[3] E. GÖRANSSON, Om ett samtidigt införande av begreppen integral och derivata samt H. OLDENBURG, Ett bidrag till frågan om differential- och integralkalkylens ställning på realgymnasiets timplan, båda i Pedagogisk Tidskrift år 1910. OLOF JOSEPHSON, Funktionslära för gymnasiet, 2, Stockholm, Norstedt, 1929.

[4] I en tredje uppsats har jag för avsikt att anföra exempel från statistiken.

ämnen. Försöken skola vara omsorgsfullt utförda och endast behäftade med tillfälliga fel. På sätt i *fig. 1* antydes, uppritar man ett koordinatsystem och avsätter på x-axeln å ömse sidor om nollpunkten sträckorna 1, 2, 3 . . . åt den positiva sidan och -1, -2, -3 . . . åt den negativa. Man antager, att dessa tal angiva avvikelserna ε, 2ε, 3ε . . . å ena sidan samt 0, $-\varepsilon$, -2ε, -3ε, . . . å den andra. Å sträckorna mellan 0 och ε, ε och 2ε, 2ε och 3ε . . . å ena sidan samt mellan 0 och $-\varepsilon$, $-\varepsilon$ och -2ε, -2ε och -3ε, . . . å den andra, uppritas rektanglar, vilkas höjder

Fig. 1.

äro proportionella med antalet försök behäftade med fel belägna mellan angivna gränser. Om systematiska (konstanta) fel äro omsorgsfullt eliminerade, antaga rektanglarna det utseende, som angives i fig. 1. Deras höjd avtager allt hastigare, så att antalet observationer, där felet överstiger ett visst värde λ, praktiskt sett är 0. Om sträckan mellan 0 och λ delas i allt mindre delar samtidigt med att försökens antal blir allt större, närma sig rektanglarnas övre sidor alltmer till en kurva i form av en klocka. Det anmärkningsvärda är, att olika slag av omsorgsfullt utförda försök försedda med endast tillfälliga fel, ge upphov till kurvor av enahanda utseende, »ett uttryck för enkla kombinatoriska förhållanden, vilka ligga bakom det, som vi uppfatta som en slump».[1]

[1] K.-G. Hagström loc. cit. sid. 63.

Låt x vara felets storlek och y antalet observationer med felet x. Av fig. 1 framgår, att flertalet observationer äro sådana, där felet är litet. $f(0)$ är alltså ett maximum och följaktligen $f'(0)=0$. Vidare förekomma positiva fel i samma utsträckning som negativa med samma numeriska värde. Kurvan har alltså y-axeln till symmetrilinje. För positiva x-värden bildar kurvans tangent uppenbarligen en trubbig vinkel med x-axelns positiva riktning, för negativa x-värden åter en spetsig. Alltså är $f'(x)<0$ för positiva och >0 för negativa x-värden. Av *fig. 2* inses, att subtangenten P_1T

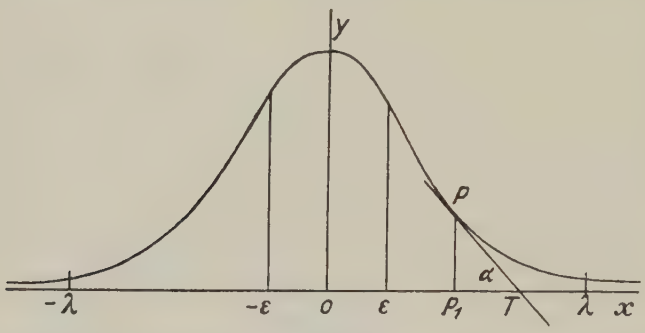


Fig. 2.

närmar sig värdet ∞, då x närmar sig 0, men däremot synes avtaga, då x växer. Den enklaste funktion, som har nämnda egenskap, är $\frac{a}{x}$. Nu är

$$P_1T=f(x)\operatorname{cotg}\alpha=-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Alltså kan man antaga, att

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=-\frac{a}{x}.$$

Om man ersätter $\frac{1}{a}$ med c^2, eftersom $f'(x)<0$ för $x>0$ och $f(x)>0$ för alla värden på x, får man

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-c^2x,$$

varav

$$\log f(x) = -\frac{c^2}{2}x^2 + \log k.$$

Om man sätter $\frac{c^2}{2} = h^2$, erhålles uttrycket

$$y = ke^{-h^2x^2}.$$

Det visar sig, att denna funktion med stor noggrannhet återger de empiriskt funna värdena, när endast, som ovan förutsattes, tillfälliga och ej systematiska fel föreligga.

Antalet observationer, vilkas avvikelse från medelvärdet ligger mellan $x=a$ och $x=b$, angives av den yta, som begränsas av x-axeln mellan a och b, motsvarande ordinator och kurvan. Förhållandet mellan ifrågavarande yta och hela den yta, som begränsas av kurvan och x-axeln och som utgör antalet av alla tänkbara fel, anger alltså, hur stor bråkdel p av samtliga felen äro belägna mellan a och b. Man säger därför, att p anger *felfrekvensen* mellan a och b eller *sannolikheten* för att ett fel ligger mellan a och b. Man har alltså

$$p = \frac{k\int_a^b e^{-h^2x^2}dx}{k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}dx}.$$

I integralkalkylen bevisas, att

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}.$$

Sättes $z = hx$, blir alltså

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

Eftersom k ingår både i täljaren och nämnaren i uttrycket för att felet sannolikt ligger mellan två gränser, är det likgiltigt, hur k väljes. Man brukar bestämma k så, att den yta, som ingår i nämnaren i uttrycket för p, blir lika med 1, d. v. s.

$$k\frac{\sqrt{\pi}}{h} = 1,$$

varigenom uttrycket för sannolikheten för att felen ligga mellan två gränser a och b antager formen

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2x^2} dx .$$

Gauss' felkurva, som för $h^2 = \frac{1}{2}$ övergår i den normala sannolikhetsfunktionen, har alltså till ekvation

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} .$$

I en följande uppsats skall jag komma till tillämpningar. Av det anförda framgår, att det sätt varpå probabilitetskalkylen bör införas i elementarundervisningen, alltjämt befinner sig i stöpsleven. Åtskilligt ger emellertid vid handen, att den riktning, som uppstått i England och som uppbygger sannolikhetsräkning på erfarenhet från andra områden av det mänskliga livet än hasardspel, kommer att vinna ökad anslutning. Om nu vederbörande icke taga det radikala steget att tills vidare från kursplanen avföra sannolikhetskalkylen som obligatoriskt moment — vilket vore det lyckligaste — vore det synnerligen önskvärt, att i de metodiska anvisningarna till 1928 års kursplan, vilka ännu icke utkommit, den riktning, som representeras av den engelska skolan, kunde tillgodoses. I detta sammanhang torde förtjäna att erinras, att från England härstamma, ehuru i modifierad form, de frivilliga laborationerna i realskolan, vilka infördes genom 1906 års kursplan.

Lika litet som på den tid, då jag var lärare, torde det numera vara förbjudet för en lärare att i undervisningen upptaga ett eller annat moment, som icke ingår i kursplanen, t. ex. något om permutationer och variationer, något om olika former av försäkring o. d. Däremot finner jag det vara föga lämpligt, att i skolan införes en teori för spel med kort eller tärning allra minst genom påbud i kursplanen.

Om kursen i sannolikhetsräkning.

I anslutning till föregående artikel vill red. göra några korta erinringar och meddela några upplysningar.

Först vill red. rikta ett tack till byråchefen GÖRANSSON för hans inlägg i denna fråga, särskilt värdefullt, emedan det grundar sig lika mycket på en långvarig lärarerfarenhet som på en mångårig praktisk verksamhet som statistiker och försäkringsmatematiker.

Det är så långt red. förstår att tolka läget, en berättigad, mycket stark opinion inom landets lärarkretsar mot införandet av sannolikhetskalkyl å gymnasiet. Många erfarna lärare anse, att ett uppenbart felgrepp föreligger, vilket snarast bör rättas.

Man framhåller de pedagogiska svårigheterna och förutser, att det — på grund av dessa och den knappa tiden — otvivelaktigt kommer att bli ett mycket klent utbyte av detta kapitel, och menar, att skulle matematikkursen utvidgas — möjligheten härav ifrågasättes av många — så hade man väl i första hand bort tänka på elementen av integralkalkylen och enkla differentialekvationer, vilka kapitel organiskt ansluta sig till övriga delar av matematikkursen, och vilka ju bl. a. äro av grundläggande betydelse för det moment i fysikkursen, som så starkt betonas i den nya kursplanen, nämligen växelströmsläran.

Bland lärare som red. kommit i beröring med, har den meningen gjort sig gällande, att sannolikhetsräkningen — såsom artikelförfattaren här ovan föreslår — omedelbart bör avföras från latingymnasiets kursplan, och att den likaledes bör utgå ur realgymnasiets obligatoriska kurser och hänvisas till det specialiserade enskilda arbetet.[1]

Ämneskonferenserna borde diskutera denna sak och hos vederbörande göra en hemställan i denna riktning. Ett mångstämmigt dylikt yrkande bör ej förfela att göra verkan.

[1] Lektor O. JOSEPHSON har i tidskriftens septembernummer, 1929, framfört liknande synpunkter.

Till upplysning för dem som — i avvaktan på en dylik revision — enligt kursplanen äro förpliktade att med eleverna genomgå »enkla exempel i sannolikhetsräkning», må meddelas, att Skolöverstyrelsen avslagit alla ansökningar från ämneskonferenserna om särskild lärobok i sannolikhetsräkning. Detta kan endast tolkas så, att de utgivna läroböckerna (se noten sid. 195) innehålla en avsevärt större kurs än som Överstyrelsen anser lämplig; styrelsen menar kanske, att det kunde vara tillräckligt med några sidor i läroboken i algebra.

Men har avsikten sålunda varit, att man endast relativt lätt skulle behandla detta kapitel, varför poängterades det så tydligt såsom ett särskilt moment i kursplanen? Någon färdighet i räkning på detta område har man väl då aldrig tänkt sig att eleverna skulle uppnå — vilken nytta skulle de väl för övrigt ha därav? Konsekvensen av denna ståndpunkt synes med nödvändighet bli den, att *inga uppgifter på detta område böra ges i det skriftliga provet i studentexamen.*

Vilken utgång frågan om sannolikhetskalkylens ställning än kommer att få, måste det anses otänkbart att några studentuppgifter från detta område skola förekomma vid de första årens examina enligt den nya stadgan. De upplysningar, red. inhämtat från Skolöverstyrelsen angående just denna punkt, ha ej rubbat denna red:s övertygelse.

Situationen synes således vara sådan, att man tills linjerna klarnat, lugnt kan avstå från att fördjupa sig i detta kapitel utan nöja sig med att klargöra sannolikhetsbegreppet och med några enkla exempel belysa dess betydelse. Den väg byråchefen Göransson ovan skisserar, den empiriska, synes innebära möjligheter, som böra prövas.

Åsikterna i denna fråga kunna naturligtvis vara delade. Det är givet, att tidskriftens spalter stå öppna för sakliga inlägg även från dem som representera en annan ståndpunkt än den ovan framförda. *C. E. Blom.*

Materievågen.

Av HILDING FAXÉN.

Sedan Nobelpriset i fysik i slutet på förra året tilldelades Louis de Broglie för hans upptäckt av materievågen, ha ett stort antal populära artiklar om denna utkommit i tidningar och tidskrifter. Artikelförfattarna ha ofta med flykt och talang skildrat de underbara vyer, som öppna sig vid upptäckten av de lagar, som reglera atomernas inre och om den omvälvning i de naturvetenskapliga tänkesätten, som blir följden. Ur dessa artiklar kan man få en intuitiv uppfattning om, vad det är fråga om; en logiskt sammanhängande framställning av hela området skulle fordra en bok i flera band.

Ändamålet med denna artikel är blygsammare. Den skall logiskt begripligt och i så förenklad form som möjligt återgiva den tankekonstruktion, som förde L. de Broglie till upptäckten av materievågen, en av grundvalarna för atomteorien.

För de Broglies ursprungliga tankebyggnad utgjorde speciella relativitetsteorien en hörnsten. Om denna har jag tidigare skrivit en uppsats i denna tidskrift.[1] (Andra årgången, dec. 1918.) Jag nämnde där, att experimentalfysikern då ej hade anledning till något livligare intresse för relativitetsteorien, därför att denna endast gör sig märkbar vid ytterst subtila mätningar och ej spelar in vid det vanliga dagliga laborerandet. Jag nämnde också, att man dock hoppades, att relativitetsteoriens vidare utbyggande skulle ge sitt mäktiga bidrag till lyftandet av den slöja, som då var bredd över vad som försiggår i atomernas inre. Det är upptakten härtill, som är föremålet för denna uppsats. Relativitetsteorien är således icke blott en från matematisk synpunkt vacker tankekonstruktion, som befriar oss från

[1] Citerade artikel omnämner också den allmänna relativitetsteorien. Senare hälften av den delen av uppsatsen ger uttryck åt en negativ inställning. Kort efter artikelns tryckning blev jag emellertid vid närmare studium en övertygad och beundrande anhängare även av allmänna relativitetsteorien.

ett nedärvt krav på lättfattlig åskådlighet, utan den börjar också visa sin fruktbarhet som en av fysikens grundprinciper.

För överskådlighetens skull skall jag först i korthet erinra om den speciella relativitetsteoriens tankegång.

§ 1. Relativitetsprincipen. De astronomiska observationerna och de i samband därmed gjorda beräkningarna ha gammalt rykte för sin precision. Astronomerna ha visat, att Newtonska dynamiken gäller med mycket hög grad av noggrannhet för planeternas gång kring solen. Att man vid de noggrannaste beräkningar över Merkurius' bana funnit en mycket liten avvikelse från Newtonska dynamiken, en avvikelse, som står i överensstämmelse med allmänna relativitetsteorien, kunna vi i detta sammanhang bortse från.

I Newtonska dynamikens grundlagar ingår begreppet »acceleration» hos en kropp. Detta ord har en mening, endast om det finnes något, låt oss kalla det inertialsystem, i förhållande till vilket accelerationen mätes. Som inertialsystem använda astronomerna ett koordinatsystem, vars origo ligger i solsystemets tyngdpunkt och vars axlar peka mot avlägsna fixstjärnor. Även om denna definition är behäftad med logiska svårigheter, såsom att inga fixstjärnor torde stå absolut stilla, så har den dock räckt till för det praktiska behovet. Denna erfarenhet har varit huvudstödet för antagandet av existensen utav ett inertialsystem, i förhållande till vilket den Newtonska dynamiken skulle vara *exakt* giltig.

Mäter man en kropps rörelse i förhållande till ett annat system, som har konstant translationshastighet i förhållande till det förra men ingen rotationshastighet, så blir visserligen hastighetskomponenten i rörelseriktningen mindre, men accelerationen behåller samma värde. Newtons lag, att kraften, som verkar på en partikel, är lika med partikelns massa gånger dess acceleration, gäller då lika bra i förhållande till det nya systemet, ty kraft, massa och

acceleration ha samma värde antingen de uppmätas i förhållande till det ena systemet eller till det andra. På samma sätt förhåller det sig med Newtons övriga grundlagar. Alla dessa lika berättigade koordinatsystem kallas *inertialsystem.*

Att Newtonska dynamiken gäller så noggrant för solsystemet, utgör alltså ej något bevis för att det först nämnda inertialsystemet, med origo i solsystemets tyngdpunkt, skulle vara absolut stillastående. Det kunde lika väl ha en konstant translationshastighet utan rotation.

Hur skall man då finna det absolut stillastående? Man tänkte sig gärna under förra århundradet, att »världsetern», bäraren av elektromagnetiska och optiska företeelser skulle kunna anses som det absolut stillastående. Om ljuset har samma hastighet i alla riktningar i världsetern och hela solsystemet rör sig däri med stor hastighet, så borde detta kunna märkas vid mätning av ljusets hastighet i förhållande till solsystemet. Alldeles som vinden känns mindre stark, då man åker med den än mot, så tyckte man också, att ljushastigheten borde förefalla mindre i den riktning solsystemet går än i den motsatta. Det berömda Michelsonförsöket kan sägas vara en experimentell prövning av den saken. Försöket var så noggrant, att även om solsystemets gemensamma hastighet vore för liten för mätning, så skulle dock jordens hastighet i sin bana runt solen ha upptäckts. Man gjorde nämligen om försöket efter ett halvt år, då jorden alltså hade motsatt rörelseriktning. Resultatet blev negativt. På optisk väg kan en konstant translationshastighet alltså ej upptäckas. Det var ett resultat, som stod i strid med hela det dåvarande tänkesättet i fysiska frågor.

Liknande försök, att på elektromagnetisk väg upptäcka translationshastigheten ha gjorts, likaledes med negativt resultat. Även Michelsons försök har gjorts om. Riktigheten av hans resultat har bestritts, men resultatet av hela den samlade erfarenheten har dock till slut blivit detsamma som redan Michelson fann:

En konstant translationshastighet hos ett inertialsystem kan varken upptäckas med mekaniska, optiska eller elektromagnetiska försök.

Einstein uppställde den betydelsefulla hypotesen, att ovannämnda sats, som kallas relativitetsprincipen, icke blott gäller i ett specialfall, utan är en av fysikens grundlagar. Här följa några slutsatser, som Einstein dragit därur.

§ 2. Lorentztransformationen. Härmed menas det samband, som råder mellan koordinaterna i två olika inertialsystem. En punkts läge vid tiden t i förhållande till det ena inertialsystemet anges genom de rätvinkliga koordinaterna x, y, z. På analogt sätt anges en punkts läge vid tiden t_0 i förhållande till det andra inertialsystemet genom koordinaterna x_0, y_0, z_0. Vardera koordinatsystemet är fast förbundet med sitt inertialsystem. Om det senare inertialsystemet har hastigheten u i förhållande till det förra, så kan x-axeln tänkas lagd i denna hastighets riktning. Koordinatsystemet (x_0, y_0, z_0) skall vidare tänkas vara så orienterat, att dess axlar äro parallella med motsvarande axlar i (x y z) systemet. Slutligen kan origo vara lagt så, att det i ett visst ögonblick passerar genom det andra systemets origo.

Betrakta en ljusvåg, som i detta ögonblick utsändes från origo! Antag att inga materiella kroppar finnas i närheten, att alltså vågen utbreder sig i vakuum. Om en sten faller genom en lugn vattenyta, så utbreda sig ringformiga vågor på denna. På samma sätt måste man av vissa skäl anta, att ljusvågen utbreder sig klotformigt i rymden. I förbigående sagt och såvitt jag förstår, gäller detta lika väl även efter upptäckten av ljuskvanta.

Om ljusets vakuumhastighet är c, så blir ekvationen för den klotformiga yta, som vågen bildar,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hur ser samma vågs ekvation ut i det andra inertialsystemet? Enligt relativitetsprincipen, som ovan återgavs

med kursiverad stil, skulle dess translationshastighet ej kunna upptäckas. Vågen bör då lyda samma lag i sin utbredning även i detta inertialsystem. Det innebär, att dess ekvation har samma form

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - c^2 t_0^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Nu skall sambandet mellan x, y, z, t och x_0, y_0, z_0, t_0 sökas. Frågan kan formuleras så: vilka värden ha x_0, y_0, z_0 och t_0 i punkten x, y, z vid tidpunkten t? Mot varje värde på x, y, z, t bör svara ett och blott ett värde på x_0, y_0, z_0, t_0. Enklaste antagandet är, att x_0, y_0, z_0, t_0 äro polynom av första graden i variablerna x, y, z, t och tvärtom. Vidare har man rätt att vänta sig rotationssymmetri kring den gemensamma x-x_0-axeln. Planet $x_0 = 0$ i »rörliga» systemet har ekvationen $x = u\,t$ i »fasta» systemet, om vi för ett ögonblick få använda dessa benämningar på systemen. Med hänsyn till det sagda får uttrycket för x_0 formen $x_0 = \varkappa(u) \cdot (x - u\,t)$, där $\varkappa$ är en funktion av u, som senare skall bestämmas. Enär planet $y_0 = 0$ enligt gjorda förutsättningar är identiskt med planet $y = 0$, återstår intet annat val för uttrycket för y_0 än $y_0 = \lambda(u) \cdot y$, där $\lambda(u)$ är en funktion, som även den skall bestämmas. Rotationssymmetrien fordrar sedan $z_0 = \lambda(u) \cdot z$. Slutligen skall även t_0 vara första-grads-polynom i x, y, z, t. På grund av rotationssymmetrien kan detta polynom ej innehålla y och z. Då återstår endast möjligheten $t_0 = \mu(u) \cdot t - \gamma(u) \cdot x$, där μ och γ äro två nya funktioner att bestämma.

Dessa hypotetiskt uppställda samband mellan de båda systemen av koordinater skola gälla, även om u är negativt, d. v. s. det rörliga systemets hastighet är riktad åt andra hållet. Av symmetriskäl måste vi antaga, att en hastighet u i x-axelns led medför samma förändring beträffande y- och z-axlarna som den rakt motsatta hastigheten $-u$ i x-axelns led medför. D. v. s. vi måste antaga $\lambda(u) = \lambda(-u)$. De sökta formlerna böra ge uttryck för en universell lag, d. v. s. de böra uttrycka koordinaterna i vilket inertialsystem som helst med hjälp av ett annat vilket som helst.

De böra då ge x, y, z och t som funktion av x_0, y_0, z_0, t_0. Så t. ex. böra följande formler vara samtidigt giltiga $y_0 = \lambda(u) \cdot y$, $z_0 = \lambda(u) \cdot z$, $y = \lambda(-u) \cdot y_0$, $z = \lambda(-u) \cdot z_0$. Då, som sagt, $\lambda(u)$ är lika med $\lambda(-u)$, följer härur $\lambda(u) = \pm 1$. För $u = 0$ är $\lambda(u) = +1$. Det skulle då innebära en meningslös komplikation att antaga, att $\lambda(u)$ någonsin kunde antaga sitt andra möjliga värde -1. Alltså få vi $\lambda(u) = 1$.

För att finna värdena på de övriga obekanta funktionerna skola vi insätta uttrycken för x_0, y_0, z_0, t_0 i ekvationen (2), som ju är ekvationen för ljusvågen. Då får denna ekvation för ljusvågen en annan form, nämligen

$$x^2(x - u\,t)^2 + y^2 + z^2 - c^2(\mu t - \gamma x)^2 = 0.$$

Detta är liksom (1) ljusvågens ekvation i variablerna x, y, z, t. För varje värde på t utgör ovanstående likhet alltså ekvationen för en sfär med radien ct. Då måste koefficienten för x^2 vara 1, koefficienten för $x\,t$ noll, och för t^2 måste koefficienten vara $-c^2$. Så erhålles ett ekvationssystem, vars lösning lyder

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \varkappa = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \gamma = \frac{\pm u}{c^2\sqrt{1-\beta^2}},\quad \beta = \frac{u}{c}.$$

Minustecknen förkastas av samma skäl som gällde för γ. Insättas dessa värden i sambanden mellan x_0, y_0, z_0, t_0 och x, y, z, t, fås följande ekvationer, som kallas

Lorentztransformationen:

$$(3)\qquad x_0 = \frac{x - u\,t}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad y_0 = y,\quad z_0 = z,\quad t_0 = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Benämningen kommer därav, att H. A. Lorentz sökte genom successiv approximation bestämma formen hos det variabelutbyte, som vore så beskaffat, att de Maxwellska ekvationerna för vakuum bleve av samma form i det nya koordinatsystemet som i det gamla. Den exakta lösningen av detta problem utgör just ovanstående variabelutbyte.

Detta är ett mycket viktigt faktum, eftersom de Maxwellska ekvationerna i den form, som Lorentz givit dem, utgöra ett kondensat av förra århundradets forskning på elektromagnetismens område. Eftersom Lorentztransformationen utgör den speciella relativitetsteoriens kärna, brukar man säga, att denna teori är en följd av 1800-talets elektromagnetiska forskning.

§ 3. Ingen signal kan ha större hastighet än ljuset. I det ovan omtalade Michelsonförsöket jämföres den tid, som ljuset behöver för att gå från en utgångspunkt A till en spegel B och tillbaka till A igen med den tid det behöver på vägen från A till en annan spegel B' och tillbaka igen. Vid mätningar av ljusets hastighet i laboratorier mäter man likaså den tid ljuset behöver för att genomlöpa en sträcka eller en polygon och återkomma till utgångspunkten. En konstant translationshastighet hos laboratoriet kan ej upptäckas på detta sätt. Detta är i överensstämmelse med relativitetsprincipen.

Annorlunda skulle det vara, om man kunde mäta ljusets tid för att gå en enkel tur från A till B. Ty om laboratoriet hade en translationshastighet i denna riktning i förhållande till »världsetern», skulle ljuset behöva längre tid på vägen A till B än på vägen B till A. Kunde man bestämma dessa gångtider var för sig i stället för, som vanligen sker, deras summa, skulle man tvärtemot relativitetsprincipen kunna bestämma nämnda translationshastighet.

En dylik mätning skulle förutsätta, att observatorn i punkten B hade kännedom om när ljuset utgår från A, så att han kunde veta, hur lång tid ljuset varit på väg. Härtill fordras, att han för injustering av tidmätarna hade fått ett meddelande (tidssignal), som gått snabbare än ljuset. Skulle man finna en dylik signaleringsmetod, hade man därmed kullkastat relativitetsteorien. Om den senare skall kunna upprätthållas, måste man alltså göra den hypotesen, att det ej kan finnas någon tidssignal, som går snabbare än ljuset. Intet experimentellt faktum talar mot denna hypotes.

Härmed har så mycket av relativitetsteorien antytts, som behöves för det följande. Den som finner svårigheter däri eller vill ha en mera fullständig bild, hänvisas till utförligare framställningar.

§ 4. Vågrörelseteori och korpuskularteori för ljuset. Dessa tvenne olika uppfattningar om ljuset ha som bekant kämpat mot varandra under århundraden. Väl syntes vågrörelseteorien under 1800-talet uppleva sådana triumfer, att man vid detta århundrades slut kunde säga, att man visste lika säkert, som man överhuvud visste något i fysiken, att ljuset vore en vågrörelse. Ty interferens- och polarisationsfenomenen kunde omöjligen få en enkel förklaring enligt korpuskularteorien, medan hypotesen, att ljuset är en vågrörelse, gav en så fullständig och med den växande mångfalden av experimentella iakttagelser så överensstämmande och samtidigt så enkel teori, som man kunde begära.

Å andra sidan kunde de företeelser, som stå i samband med ljusets emission och absorption endast ofullständigt förklaras med den då härskande formen av vågrörelseteorien. Och vid århundradets slut var det klart, att denna stode i skärande kontrast mot experimentella fakta och rentav förde till orimligheter. Däremot hade man mera förtroende för värmelärans andra huvudsats, entropilagen. Med hjälp av denna kunde Einstein (1905), sedan kvantteorien år 1900 grundats av Planck, räkna ut, att ljusets energi åtminstone vid höga svängningstal, ν, var koncentrerad på små, praktiskt taget punktformiga kvanta, vardera med energibeloppet $h\nu$, där h är den Planckska konstanten. I detta påstående ingår begreppet svängningstal, som egendomligt nog är hämtat från vågrörelseteorien, och som är antalet svängningar pr sekund hos ljusvågen. Icke ens vid formuleringen av grundhypotesen, att ljusets energi är uppdelad på punktformiga kvanta, kunde man således undvara den motsatta uppfattningens begreppsbildningar.

Av största betydelse för fysikens utveckling blev den följdsats ur nämnda tes av Einstein, som säger, att om

materie (en atom, en molekyl eller en kristall o. s. v.) absorberar ljus, så absorberas ljuset icke kontinuerligt och i en jämn ström utan plötsligt och i energiportioner av storleken $h\nu$, dessemellan ingenting alls. På samma sätt, då ljus emitteras. Lagen har sedan generaliserats. Den gäller för ljus av alla våglängder, inklusive röntgenstrålar och gammastrålar. Den ligger till grund för teorien för fotoelektriska effekten, för Bohrs atomteori o. s. v. Den har blivit experimentellt bekräftad på otaliga sätt.

Vi skola vidare ge skäl för att detta punktformiga ljuskvantum vid växelverkan med materie lyder icke blott lagen för energiens utan även lagen för impulsens konstans. Med en partikels impuls eller rörelsemängd beteckna vi som bekant produkten av dess massa och hastighet.

Tänk t. ex. på lagen för strålningstrycket! Denna lag säger, att om en kropp belyses med parallellt ljus och absorberar praktiskt taget hela ljusmängden, vars energi må vara E, så erhåller kroppen en impuls av storleken E/c i ljusets fortplantningsriktning (Poynting, Lebedew, Nichols och Hull). Det är då naturligt att antaga, att ljuset medfört denna impulsmängd. Då nu ljuset tänkes uppdelat i kvanta med energien $h\nu$, kommer på vart kvantum impulsbeloppet $h\nu/c$ i rörelseriktningen, där c är ljusets hastighet i vakuum.

Denna uppdelning bekräftas exempelvis genom det faktum, att förloppet av en stöt mellan ett ljuskvantum och en elektron kan beräknas enligt lagarna för materiella kroppars stöt (A. H. Compton). I vissa avseenden förhåller sig alltså ett ljuskvantum som en materiell punkt. (Se vidare docenten Rudbergs artikel i Svenska Fysikersamfundets årsbok 1929.)

Vid det konsekventa genomförandet av relativitetsteorien fann man, att en kropps massa ej är konstant utan beror på hastigheten. En kropp i rörelse har större massa än samma kropp i vila. Skillnaden är lika med rörelseenergien, dividerad med c^2. Massan hos en kropp i rörelse består sålunda av två delar, nämligen dels kroppens massa i vilande tillstånd, dels den massa, som rörelseenergien be-

sitter. Det härvidlag mellan energi E och massa m bestående sambandet

$$E = c^2 m$$

uppfattade Einstein som ett specialfall av en generell naturlag. Då nu ett ljuskvantum har energien $h\nu$, är det naturligt att anta, att det har massan $h\nu/c^2$. Detta stämmer också med att dess impuls är $h\nu/c$, emedan impuls är lika med massa gånger hastighet. I vissa avseenden förhåller sig alltså ett ljuskvantum som en materiell punkt.

Vid tidpunkten för Louis de Broglies doktorsavhandling (1924) voro således både vågrörelseteorien för ljuset och ljuskvantumhypotesen oumbärliga och centrala grundpelare för fysiken, ehuru man icke kunde förstå, huru dessa båda konträrt motsatta påståenden om ljuset samtidigt kunde vara sanna. Denna dualism uppfyllde ej de krav, man var van att ställa på en »exakt naturvetenskap».

§ 5. Materiens andra natur, vågnaturen. Då nu ljuset faktiskt har två naturer utan sammanblandning och förvandling oupplösligt och oskiljaktigt förenade, så tänkte sig Louis de Broglie, att det måhända var på samma sätt med materien. Det djärva steget att på detta sätt redan i grundföreställningarna om materien införa en tills vidare obegriplig dualism kunde han taga i medvetandet om, att våra fysikaliska teorier och tänkesätt ändock på något sätt bygga på felaktig grund. Det hade exempelvis blivit klart, att den då härskande atomteorien, som brukar benämnas den Bohrska, visserligen betydde ett stort framsteg utöver vad som förut fanns, men ändock innehölle antaganden av provisorisk karaktär. Bohrs avbrytande av de gamla nedärvda tankebanorna var ännu ej på ett tillräckligt radikalt sätt genomfört. Vi skola emellertid ej uppehålla oss vid, hur de Broglie och andra forskare stegvis kunde förbättra atomteorien, utan endast beskriva, hur han med relativitetsteoriens hjälp kunde närmare utforma hypotesen om materievågen.

Om man vill förbinda en vågrörelse med varje materiell punkt, så är det naturligt att anta, att vågen har samma fortplantningsriktning som den materiella punkten. Befinner sig denna senare i vila, kan vågen inte ha någon fortplantningsriktning alls. Vågen har då förenklats till en ren synkron svängningsrörelse $A \cos 2\pi\nu_0 t_0$. I detta uttryck betecknar t_0 tiden. A är amplituden, och ν_0 kallas svängningstalet. Denna svängningsrörelse antages försiggå icke endast i den materiella punkten utan antages utfylla hela det oändliga rummet. Till en början är det visserligen tänkbart, att amplituden A blir försvinnande liten på större avstånd från den materiella punkten. För det konsekventa utbyggandet av teorien med hänsyn till den övriga kvantmekaniken visade det sig emellertid nödvändigt att antaga, att amplituden A är lika i hela rymden, då punktens hastighet är noll.

Vore detta en fysikalisk teori i den gamla stilen, skulle man också ange den kropp, som svänger eller det medium, i vilket svängningen försiggår. Därom är ej alls fråga. Man nöjer sig med att räkna så, som om det vore en vågrörelse. De formella räkningarna ha blivit huvudsaken och ej de åskådliga fysikaliska bilderna.

Hur skall den våg skrivas, som bör förbindas med en materiell punkt, som rör sig utan inverkan av yttre krafter med en oföränderlig hastighet u? Man kan tänka sig ett inertialsystem, som medföljer den materiella punkten. Enligt relativitetsprincipen skall i detta inertialsystem allt avlöpa som i varje annat inertialsystem. Kalla vi dess koordinater x_0, y_0, z_0 och tiden t_0, så skall alltså med den materiella punkten associeras samma rena svängningsrörelse $A \cos 2\pi\nu_0 t_0$, som vi förut talade om, ty punkten är i vila i detta inertialsystem. Nu antogo vi detta ha en viss hastighet u i förhållande till ett annat inertialsystem, i vilket vi befinna oss och iakttaga nyssnämnda svängningsrörelse. Hur uppfatta vi då denna? Om x- och x_0-axlarna läggas i hastighetens riktning, fås svaret ur Lorentz-

transformationen (3). Sätta vi in värdet på t_0, så fås *materievågen*

$$A \cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)\right], \text{ där } \nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ och } \beta = \frac{u}{c}.$$

Detta är ingen ren svängningsrörelse, utan en fortskridande vågrörelse, ty för det första är den periodisk som funktion av x betraktad. Man kan, om man så vill, säga, att den består av vågberg och vågdalar. Vågbergens toppar skulle ligga på de ställen, där kosinus har sitt största värde, som är ett, d. v. s. där ekvationen

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad 2\pi\nu\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) = 2\pi n \qquad (n = \text{heltal})$$

är uppfylld. Denna ekvation för vågbergens läge visar, att då tiden t växer, så växer också x, ty alla andra bokstäver i ekvationen beteckna konstanter. Detta betyder, att vågbergen vandra i x-axelns led. Vågrörelsen är fortskridande. Fortplantningshastigheten, eller som man säger, fashastigheten är c/β. Vågrörelsens svängningstal ν är något större än ν_0.

Hur kunde den enkla svängningsrörelsen så plötsligt förvandlas till en fortskridande våg? Saken förefaller mindre märkvärdig, om man tänker på avstånd av astronomisk storleksordning. Låt oss därför tänka på någon enkel svängningsrörelse, t. ex. en stel rak stav så lång, att den når genom hela solsystemet! Om den rör sig vinkelrätt mot längdriktningen fram och tillbaka, så att den utför den enkla svängningsrörelsen $A \cos 2\pi\nu t$ i förhållande till solsystemets inertialsystem, så ser en iakttagare ändock rörelsen på ett annat sätt. På grund av att ljuset behöver en viss tid för att gå, har den rörelse, han ser hos stavens bortre ändar, försiggått några timmar tidigare än han ser den. Vad en iakttagare med sina ögon omedelbart iakttar, är alltså ingen synkron rörelse utan en vågrörelse, som åt båda hållen fortskrider ut mot stavens ändpunkter, om iakttagaren är vid mitten. M. a. o. ljusets ändliga fortplantnings-

hastighet gör, att staven liksom synes slingra sig. Man måste *räkna* sig till, att staven svänger synkront genom att korrigera för den tid, som ljuset behöver för att gå. Vid sina beräkningar använder han det nyssnämnda för solsystemets mekanik så tillfredsställande inertialsystemet. Vi skola emellertid se, att räkningens resultat beror på valet av inertialsystem.

Låt oss därför tänka på en annan iakttagare, som föredrar det inertialsystem, vars origo sammanfaller med tyngdpunkten till det materiella system, som består av solsystemet och de närmaste stjärnorna. Då solen rör sig snabbt i förhållande till de närmaste stjärnorna, anser han då solsystemet ha en hastighet av några mil i sekunden. Om båda iakttagarna befinna sig på samma plats vid stavens mittpunkt, ha de samma synintryck. Båda se den nämnda slingrande rörelsen hos staven. Men den senare iakttagaren tolkar sina synintryck på annat sätt. Han räknar nämligen med att solsystemet ilat ljuset till mötes eller tvärtom och får då ur sina kalkyler det resultatet, att icke alla delar av staven samtidigt passerat genom mittläget, icke alla delar av staven samtidigt vända vid ytterlägena utan att staven utför en fortskridande vågrörelse.

Att den senare iakttagaren fick annat räkneresultat än den förre, beror först och främst på att den senare iakttagaren anser ljuset ha antingen en kortare eller en längre väg att gå, än den förre iakttagaren håller före, från ändpunkten av staven till mittpunkten, därför att han anser staven ha en hastighet, eftersom den medföljer solsystemet. För enkelhetens skull kan man tänka sig, att denna hastighet sammanfaller med stavens längdriktning.

Redan utan användning av relativitetsteori beror alltså vår åsikt, om staven beskriver en synkron svängningsrörelse eller en fortskridande vågrörelse, på vilket inertialsystem, som lägges till grund för beräkningarna. Enligt relativitetsteorien gäller dessutom, att alla inertialsystem äro lika goda, alltså även alla de nämnda uppfattningarna om stavens rörelse.

Ungefär så har de Broglie åskådliggjort materievågens

uppkomst ur en ren svängningsrörelse genom en Lorentz-transformation.

Då $\beta = u/c$ är mindre än ett, så visar uttrycket c/β för materievågens hastighet, att denna är större än ljusets. Strider ej detta mot relativitetsteoriens resultat, att ingen hastighet får vara större än ljusets? Så brukar påståendet ofta formuleras, men i § 3 sågo vi, att kärnpunkten är den, att hastigheter större än ljusets äro uteslutna, endast försåvitt det är fråga om fenomen, som äro användbara som tidssignaler. Men materievågen är iakttagbar endast genom sin inverkan på rörelsen hos den materiella punkt, den tillhör. Det är den materiella punkten, ej vågen, som är användbar som tidssignal, och i den egenskapen går den materiella punkten långsammare än ljuset. Vad den frågan beträffar, råder alltså full överensstämmelse med relativitetsteorien.

§ 6. Materievågens egenskaper. Om E betyder ett ljuskvantums energi, så gäller enligt § 4 sambandet $E = h\nu$. I slutet på samma paragraf nämndes, att all energi E skulle besitta en massa m enligt formeln $E = m c^2$. De Broglie bildade ur dessa båda samband ett nytt, i det han med varje massa m förband ett svängningstal ν enligt formeln $h\nu = m c^2$.

Med en kropp i vila med massan m_0 förbindes alltså svängningstalet $\nu_0 = m_0 c^2/h$. Till kroppen i rörelse hör, enligt vad som sades i § 5 svängningstalet $\nu = \nu_0/\sqrt{1-\beta^2}$. Insätta vi detta i nyss uppskrivna ekvationer, få vi $m c^2 = h\nu = h\nu_0/\sqrt{1-\beta^2} = m_0 c^2/\sqrt{1-\beta^2}$.

För att det hela skall stämma, fordras alltså, att massan hos en kropp beror på dess hastighet enligt lagen $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$. Till samma resultat kom relativitetsteorien, då man konsekvent genomförde dess dynamik. Vi kunna nu approximativt kontrollera det påstående, som gjordes i § 4, att massan hos en kropp i rörelse består av två delar, nämligen kroppens massa m_0 i vilande tillstånd och den massa,

som rörelseenergien äger. Om β är mycket mindre än ett, kan man göra följande approximativa räkning

$$m = m_0/\sqrt{1-\beta^2} = m_0(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \ldots) = m_0 + m_0\frac{u^2}{2c^2} + \ldots$$

Då $u = c\beta$ är kroppens hastighet, är dess rörelseenergi enligt Newtonska mekaniken $T = m_0u^2/2$. Denna har massan $T/c^2 = m_0u^2/2c^2$. Eftersom Newtonska dynamiken skall vara tillnärmelsevis riktig, då β är mycket mindre än ett, så ha vi härmed fått en kontroll på det gjorda påståendet.

Då värdet på ν insättes, får uttrycket å sid. 12 för materievågen formen

$$A \cos\left[\frac{2\pi mc^2}{h}\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)\right].$$

Våglängden λ är lika med avståndet mellan topparna av två vågberg. Den beräknas enligt formeln (4) å sid. 12 till $\lambda = c/\nu\beta$ eller, med värdet på ν insatt, $\lambda = h/mc\beta$. Då $c\beta = u$ och då mu är partikelns impuls, som brukar kallas p, fås för våglängden uttrycket $\lambda = h/p$.

Innan ännu något experiment gjorts, som kunde bekräfta materievågornas realitet, kunde alltså deras våglängd beräknas och uttryckas i kända och mätbara storheter. Genom denna exakta våglängdsberäkning erhölls också en möjlighet till bestämd kontroll av teorien.

Vill man avgöra, om en strålning är av korpuskulär natur eller en vågrörelse, så söker man efter interferensfenomen. Så t. ex. bevisades röntgenstrålarnas vågnatur genom Laues gemensamt med Friedrich och Knipping gjorda upptäckt, att interferensfenomen uppträda vid röntgenstrålarnas gång genom kristaller. Interferensfenomen äro ju ett karakteristikum för vågrörelse. Ur dessa kan våglängden beräknas. Bragg förenklade metoden genom att undersöka röntgenstrålarnas reflexion mot kristallytor eller rättare mätplan i kristallen. Metoden är ytterligt noggrann, vilket Siegbahn och hans skola i särskilt hög grad visat.

Eftersom den till fria elektroner hörande materievågens våglängd är av samma storleksordning som röntgenstrålarnas, så borde man söka efter interferensfenomen vid elektroners reflexion mot kristaller.

Oberoende av de Broglies teori hade Davison och Germer redan funnit vissa egendomligheter vid elektronernas reflexion mot nickelkristaller (se närmare i E. Fredlunds artikel i Svenska Fysikersamfundets årsbok 1929). Då man sedermera med kännedom om de Broglies teori för att eliminera vissa felkällor, gav elektronerna större hastighet än i de första försöken, fann man, att dessa egendomligheter vid reflexion mot kristallytor övergingo i regelbundna interferensfenomen. Våglängden kunde bestämmas och det visade sig, att den stämde med teorien så noggrant, som man kunde begära. Därmed är det bevisat, att materievågen verkligen existerar. Det förhåller sig så, som om elektronerna vore projektiler, vilkas bana och hastighet bestämdes av en materievåg.

Interferensfenomen uppträda också vid lättare atomers och molekylers reflexion mot kristallytor (Stern och Estermann m. fl.). En vätemolekyl, som ju består av två väteatomer, reflekteras så, som om materievågen hörde till dess tyngdpunkt, ty vid beräkningen av våglängden $\lambda = h/p$, skall p betyda hela molekylens impuls. Då materievågen således förbindes med tyngdpunkten, som ju ej är någon materiell partikel, så visar detta experiment samtidigt materievågens konkreta och abstrakta karaktär. Härigenom bestyrkes nämligen den Schrödingerska teorien, som beräknar rörelsen hos de olika delarna (elektroner, atomkärnor) hos en molekyl ur en materievåg, som ej uttryckes med reella utan med komplexa storheter, och som rör sig i en rymd med tre gånger så många dimensioner, som molekylen har delar. Enligt denna teori bestämmes tyngdpunktens rörelse ur en materievåg av ovannämnd karaktär. På samma gång som teorien på detta sätt avlägsnar sig från all åskådlighet, så kommer den till överensstämmelse med en allt rikare mängd av annars obegripliga experimentella fakta.

Det förhåller sig så, som om partiklar, som äro så små som elektroner, atomer och molekyler, styrdes av materievågor. Hur går detta att förena med den Newtonska dynamiken, som dock är så beprövad? Den Schrödingerska vågmekaniken är byggd på den principen, att den vid grövre dimensioner än de nämnda ger samma resultat som Newtonska dynamiken, men den Schrödingerska teorien faller utom ramen för denna uppsats.

Man får lätt vid alltför hastigt studium den föreställningen, att relativitetsteori och atomfysik skulle vara en samling löst hopkomna fantasier och spekulationer, i synnerhet som moderna teoretici öppet erkänna, att fundamentala frågor fortfarande stå olösta. Men de Broglies ovan skildrade tanke utgör ett vackert exempel på, att de nya idéerna innehålla en så pass stor procent sanning, att man med bestämdhet kan deducera existensen även av sådana fysiska fenomen, som förefalla fullkomligt absurda från den äldre fysikens synpunkt men som ändå kunna experimentellt iakttagas.

Om fotpunktstrianglar.

Av AUGUST SÖRENSEN †.

Fotpunktstriangeln till en given punkt P med avseende på en given triangel ABC är den triangel $A_1B_1C_1$, vars sidor förena fotpunkterna av perpendiklarna PA_1, PB_1, PC_1 från den givna punkten P mot sidorna BC, CA, AB av triangeln ABC (fundamentaltriangeln).

Fundamentaltriangelns sidor BC, CA, AB beteckna vi såsom vanligt a, b, c, de motstående vinklarna α, β, γ, den omskrivna cirkelns radie R och ytan T. För perpendiklarna PA_1, PB_1, PC_1 införa vi beteckningarna x, y, z.

Förenas punkten P med vinkelspetsarna A, B och C, blir triangeln ABC uppdelad i tre deltrianglar, vilkas sammanlagda yta är $= T$. Mellan x, y, z existerar således relationen

$$ax + by + cz = 2T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

För fotpunktstriangelns dubbla yta erhålles uttrycket

$$yz \sin \alpha + zx \sin \beta + xy \sin \gamma = 2T_1, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

varur, genom multiplikation med $2R$, erhålles

$$ayz + bzx + cxy = 4RT_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Vi föresätta oss nu att finna orten för en punkt P, så belägen, att fotpunktstriangelns yta T_1 är konstant.

Elimineras z mellan (1) och (3), erhålles en ekvation mellan x och y, vilken ekvation med tillhjälp av de bekanta formlerna

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad R = \frac{abc}{4T}$$

lätt bringas under formen

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \gamma - (bx + ay) \sin \gamma + \frac{c^2 T_1}{T} = 0. \quad (4)$$

Övergången till vanliga parallellkoordinater sker genom substitutionen

$$\begin{cases} x = \xi \sin \gamma, \\ y = \eta \sin \gamma, \end{cases}$$

varigenom (4) efter division med $\sin^2 \gamma$ bringas under formen

$$\xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta \cos \gamma - (b\xi + a\eta) + \frac{4R^2 T_1}{T} = 0 \quad . \quad . \quad (5)$$

Detta är den sökta ortens ekvation, hänförd till sidorna CA och CB såsom koordinataxlar.

Ur (5) kan man, som bekant, genom en enkel parallellförflyttning av koordinatsystemet bortskaffa de icke-kvadratiska termerna av ξ och η. Detta sker genom en substitution av formen

$$\begin{cases} \xi = X + h, \\ \eta = Y + k, \end{cases}$$

varigenom (5) antager formen

$$X^2 + Y^2 + 2XY \cos \gamma + (2h + 2k \cos \gamma - b) X + (2k + 2h \cos \gamma - a) Y + h^2 + k^2 + 2hk \cos \gamma - (bh + ak) + \frac{4R^2 T_1}{T} = 0.$$

Värdena på h och k bestämmas sålunda ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2h + 2k\cos\gamma - b = 0, \\ 2k + 2h\cos\gamma - a = 0, \end{cases}$$

som ger

$$\begin{cases} h = \dfrac{b - a\cos\gamma}{2\sin^2\gamma}, \\ k = \dfrac{a - b\cos\gamma}{2\sin^2\gamma}. \end{cases}$$

Härur erhålles genom insättning

$$h^2 + k^2 + 2hk\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}{4\sin^2\gamma} = \frac{c^2}{4\sin^2\gamma} = R^2,$$

$$bh + ak = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}{2\sin^2\gamma} = \frac{c^2}{2\sin^2\gamma} = 2R^2,$$

och den sökta ekvationen antager sålunda slutligen den enkla formen

$$X^2 + Y^2 + 2XY\cos\gamma = R^2\left(1 - \frac{4T_1}{T}\right)$$

eller i polarkoordinater

$$\varrho = R\sqrt{1 - \frac{4T_1}{T}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Den sökta orten är sålunda en cirkel. För att finna medelpunktens läge behöva vi endast beakta, att h och k äro oberoende av värdet på T_1. Då nu för $T_1 = 0$ den sökta orten måste gå genom punkterna A, B och C, inses omedelbart, att den sökta orten är en med fundamentaltriangelns omskrivna cirkel koncentrisk cirkel.

Löses (6) i avseende på T_1, erhålles

$$T_1 = \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{\varrho^2}{R^2}\right)T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Den bevisade satsen kan formuleras sålunda

Sats 1. Ytan av alla fotpunktstrianglar till en godtycklig punkt P på en med fundamentaltriangelns omskrivna cirkel koncentrisk cirkel är konstant.

För $T_1 = 0$ ger (6) $\varrho = R$. Då nu ytan av en triangel är $= 0$, endast om triangeln övergår i en rät linje, erhålles följande sats:

Sats 2. Om från en godtycklig punkt på periferien till den kring en triangel omskrivna cirkeln normaler fällas mot sidorna, så ligga dessas fotpunkter på en rät linje (sats av WALLACE).

För $\varrho = R$ ger (7) $T_1 = 0$, vilket bevisar omvändningen av föregående sats:

Sats 3. Om fotpunkterna av de perpendiklar, som från en punkt P fällas mot sidorna av en triangel, ligga i rät linje, så ligger punkten P på den kring triangeln omskrivna cirkeln.

Formel (7) ger positiva värden på T_1 för $\varrho < R$, negativa för $\varrho > R$, vilket innebär, att fotpunktstriangeln vid punktens P passage över cirkeln $\varrho = R$ *ändrar omloppriktning*. Detta kan naturligtvis ske endast därigenom, att fotpunktstriangeln vid punktens passage övergår i en rät linje.

Av (6) framgår vidare, att T_1 har ett maximivärde $T_0 = \frac{1}{4} T$ för $\varrho = 0$. Fotpunktstriangeln förenar då mittpunkterna av fundamentaltriangelns sidor.

För att uttrycka, att fotpunktstriangelns yta varierar med punktens P avstånd från fundamentaltriangelns omskrivna cirkels medelpunkt, skriva vi (7) under formen

$$T_\varrho = \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{\varrho^2}{R^2}\right) T.$$

Betrakta vi nu alla fotpunktstrianglar, som kunna tänkas uppkomma, när P ligger inom en given cirkel $\varrho = r$, erhålles såsom *medelvärde* för fotpunktstriangelns yta

$$\overline{T}_r = \frac{2\pi \int_0^r \varrho T_\varrho d\varrho}{2\pi \int_0^r \varrho d\varrho} = \frac{2}{r^2} \int_0^r \varrho T_\varrho d\varrho = \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) T.$$

För $r = R$ får man sålunda

$$\overline{T}_R = \tfrac{1}{8} T = \tfrac{1}{2} T_0.$$

En metod att framställa termostaplar.

I en uppsats i *School Science Review*, Vol. XI Oct. 1929, redogör P. M. S. BLACKET för några försök med en bolometer och en termostapel, vilka den intresserade själv kan tillverka, då härför ej kräves någon speciell teknisk utrustning eller särdeles stor skicklighet i finmekaniska arbeten. Då speciellt tillverkningen av termostaplar är av intresse, har undertecknad prövat metoden och funnit den synnerligen användbar.

Förfaringssättet grundar sig på ett arbete av W. H. WILSON och miss T. D EPPS (Proceedings Physical Society, London p. 326, 1920). Några av dessa förff:s viktigaste resultat må här framhållas.

Framställningen av termostaplar, bestående av sammanlödda metalltrådar erbjuder vissa tekniska svårigheter: a) det är ej lätt att utföra lödningar, vilka utan att försämras tillåta arbeten vid hög temperatur; b) det är svårt att medelst lödning hopfoga mycket tunna trådar utan någon anhopning av metallmassa vid lödstället; c) vidare är det synnerligen mödosamt och erfordras en viss skicklighet att tillverka termostaplar med ett stort antal element, särskilt då trådarna äro tunna. Därtill kommer den nackdelen, att lödställena på grund av olika orsaker med tiden kunna undergå förändringar, vilka medföra ett ökat motstånd.

WILSON och EPPS satte som sitt mål att söka undvika lödningsproceduren och utarbetade en metod att på elektrolytisk väg framställa termostaplar. Vill man t. ex. framställa ett termoelement av koppar och järn, kan man exempelvis utgå från en tunn konstantantråd och på halva tråden elektrolytiskt utfälla järn, under det att den andra hälften förkoppras, så att kopparn och järnet mötas på mitten av tråden. Då konstantan har mycket stort specifikt motstånd i jämförelse med järn och koppar, spelar närvaron av konstantankärnan inuti tråden icke någon roll vid tillräcklig tjocklek hos järn- och kopparhinnorna, utan systemet gör praktiskt samma tjänst som ett termoelement av koppar-järntrådar, förenade på vanligt sätt genom lödning. Metoden kan varieras på många sätt. Om man väljer de metaller, som skola ingå i systemet och detsammas proportioner på lämpligt sätt, kan man använda den metall på vilken utfällningen sker, såsom ena beståndsdelen i termoelementet. Härvid visar det sig fördelaktigt att använda en kärna av konstantan och till pläteringen taga silver eller koppar (se fig. 1). Fig. 2 är en schematisk teckning, angivande strömriktningen inom systemet. Vissa slutna strömmar kunna härvid icke undvikas.

För att utröna den roll, dessa spela, gjordes följande försök (fig. 3). En till ett band utvalsad konstantantråd (36 S. W. G.) var vid sin mittpunkt sammanlödd med en likaledes utvalsad koppartråd (40 S. W. G.). Kopparstrimman och halva konstantanstrimman lindades kring en cylinder av oledande material, och i en urtagning i denna under lödstället placerades en metalltråd, som kunde upphettas med elektrisk ström. Kopparstrimman och konstantanstrimman isolerades först från varandra med silkespapper, och spänningen mellan punkterna 1 och 2 för

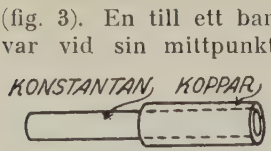


Fig. 1.

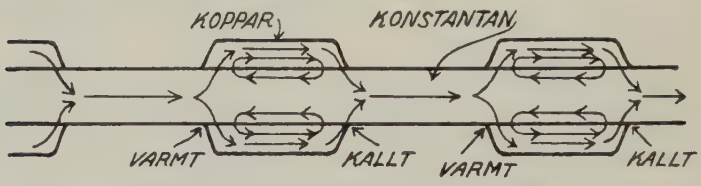


Fig. 2.

en viss ström genom värmetråden mättes. Sedan borttogs silkespapperet, och trådarna bringades i kontakt efter hela sin längd. Spänningen mellan 1 och 2 var i detta fall 6,2 procent lägre än i det förra. Närvaron av konstantankärnan inuti kopparn synes således ganska obetydligt inverka på användbarheten av termostaplar, framställda på detta sätt. (Motståndet hos termostaplarna minskas ju även något genom närvaron av konstantankärnan inom kopparen.) Då emellertid koppar och silver äro goda värmeledare, kan man icke göra beläggningen av koppar eller silver hur tjock som helst; härigenom skulle en stor del värme bortledas från det upphettade kontaktstället och detsammas temperatur sjunka. Författarna ange, att ett silverlager på konstantan bör ha en genomskärningsyta av 30 à 35 % av konstantantrådens tvärsnittsyta.

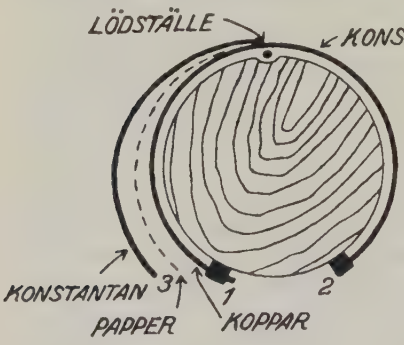


Fig. 3.

Framställningen av termostaplar med många kontaktställen — exempelvis ett par hundra — erbjuder enligt denna metod

inga svårigheter. Man kan t. ex. linda en cylinder av ebonit korkskruvformigt med konstantanband, nedsänka densamma till hälften i ett förkoppningsbad, så att cylinderns axel ligger i vätskeytans plan, och utföra den elektrolytiska utfällningen. Kontaktställena komma då att ligga på två räta linjer, vartannat kontaktställe på ena, vartannat på andra sidan av cylindern. Formen på den kropp, som uppbär tråden, kan naturligtvis varieras; det kan t. ex. ibland vara ändamålsenligt att linda tråden på en platta. För att temperaturjämvikt skall inställa sig hastigt, är det lämpligt att göra en urtagning i den kropp, som uppbär tråden, så att de kontaktställen, som skola uppvärmas, ligga fria i luften. Författarna giva några exempel på användningen av termostaplar, framställda på ovan beskrivna sätt, men synas icke närmare ha prövat desammas användbarhet såsom strålningsmätare utan nämna endast, att dylika termostaplar böra kunna användas vid spektralanalytiska undersökningar.

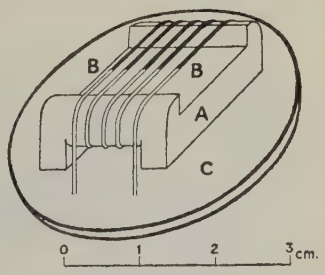


Fig. 4.

I ovan nämnda arbete redogör BLACKET för försök med en termostapel för strålningsmätning, vilken han framställt enligt WILSON-EPPS' metod. Den inre kärnan utgöres av till band utvalsad konstantantråd; strimman är 0,3 mm bred och $\frac{1}{100}$ mm tjock. Den är lindad på en med schellack överdragen stomme av koppar (fig. 4), den senare nedsänktes till hälften i en kopparsulfatlösning med trådarna vertikala, och koppar utfälldes på trådarna. Sedan de kontaktställen, som skulle bestrålas, svärtats, inneslöts det hela i en låda, försedd med en öppning, som tillät den ljus- och värmestrålning, som skulle mätas, att passera in och träffa de ljuskänsliga kontaktställena. BLACKET erhöll mycket goda resultat av sina försök.

För att pröva metoden har undertecknad förfärdigat några dylika termostaplar och därvid använt trådar av samma dimensioner som BLACKET, 20 kontaktställen ligga på framsidan i linje på en sträcka av 1 cm. Till isolering mot kopparen användes utom schellack en sorts mycket tunt japanskt silkespapper, då det visade sig, att tråden annars lätt kom i ledande förbindelse med kopparstommen. Som svärtningsmedel användes en komposition, som i särskilt hög grad absorberar värmestrålar av stora våglängder. Kopparbiten fastsattes med ett par hållare i en hålcylinder av mässing, och det infallande ljuset koncentrerades på de ljuskänsliga kontaktställena med en

i hålcylindern inbyggd ljustratt med en yttre öppning av 16 × 16 mm. Termostapeln visade sig mycket känslig. Det exemplar, som prövades, hade ett motstånd av 46 ohm, och vid prövningen användes en spegelgalvanometer av 30 ohms motstånd, vilken vid 6 m skalavstånd gav ett utslag av 6 cm för en mikroampère. Till jämförelse anställdes försök med en RUBENS' termostapel, och visade sig den av undertecknad prövade vid alla försök giva större utslag än RUBENS'. Särskilt var detta fallet vid mätning av s. k. mörk värmestrålning; så gav t. ex. en kub, fylld med 45° vatten och med den svärtade sidan vänd mot termostapeln på ett avstånd av 10 cm ett utslag av 113 cm (alltså svarande mot en termokraft av c:a 1,5 millivolt), under det att RUBENS' termostapel under samma förhållanden gav ett utslag av 48 cm. Inställningen skedde synnerligen hastigt.

Som synes av ovanstående erbjuder det inga större svårigheter att själv framställa en dylik termostapel, om man är i besittning av litet tålamod och någon händighet. Den som föredrar en färdiggjord apparat kan erhålla en dylik från firman Rudolph Grave, Stockholm. *Holjer Witt.*

Minimideviationen vid ett prisma.

I första häftet, andra årgången av denna tidskrift har lektor A. MEYER givit en härledning av satsen rörande minimideviationen vid ett prisma. Avsikten med dessa rader är att fästa uppmärksamheten på den förenkling denna härledning undergår, om man stöder sig på satsen, att deviationen vid en stråles övergång från ett medium till ett annat växer med infallsvinkeln, en sats som väl i regel torde genomgås. Se t. ex. MOLL, Lärobok i fysik, del IV, 6:e uppl., ex. 50, sid. 74.

Om en ljusstråle med normalen till sidoytorna i ordning bilda vinklarna i_1, b_1, b_2 och i_2 samt deviationen betecknas med d och prismats brytande vinkel med A, erhålles

$$\sin i_1 = n \sin b_1 \text{ och } \sin i_2 = n \sin b_2,$$

varav genom addition

$$\sin i_1 + \sin i_2 = n (\sin b_1 + \sin b_2)$$

eller $$\sin \frac{i_1 + i_2}{2} \cdot \cos \frac{i_1 - i_2}{2} = n \sin \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot \cos \frac{b_1 - b_2}{2}.$$

Men $b_1 + b_2 = A$ och $d = (i_1 - b_1) + (i_2 - b_2) = i_1 + i_2 - A$.

$$\therefore \sin \frac{A + d}{2} = n \sin \frac{A}{2} \cdot \frac{\cos \frac{b_1 - b_2}{2}}{\cos \frac{i_1 - i_2}{2}}.$$

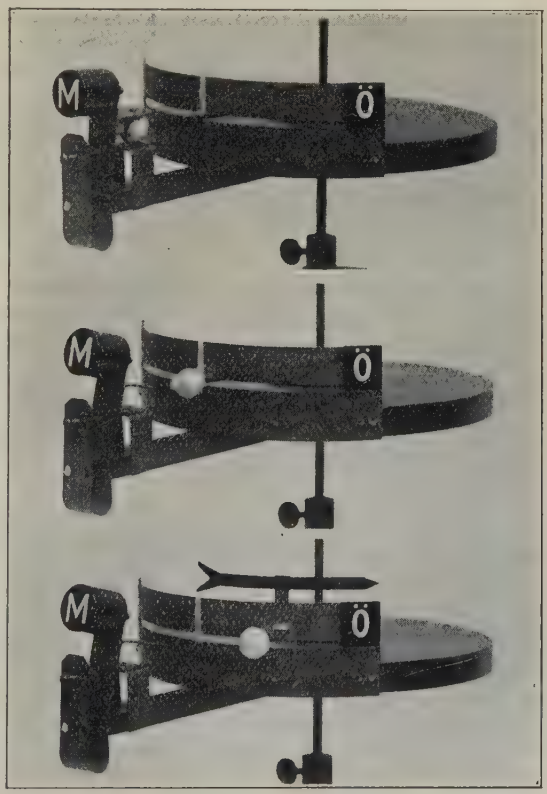
Antages $i_1 > i_2$, så är $b_1 > b_2$ och enligt ovannämnda sats $i_1 - b_1 > i_2 - b_2$ eller $i_1 - i_2 > b_1 - b_2$.

$$\because \cos\frac{i_1 - i_2}{2} < \cos\frac{b_1 - b_2}{2}.$$

Bråket $\dfrac{\cos\frac{b_1 - b_2}{2}}{\cos\frac{i_1 - i_2}{2}}$ är sålunda under den givna förutsättningen alltid > 1. Det erhåller sitt minimivärde $= 1$, om $i_1 = i_2$ och $b_1 = b_2$. Att deviationen d uppnår sitt minimum samtidigt med funktionen $\sin\frac{A+d}{2}$, inses omedelbart. *S. Bågman.*

Apparat för Benzenbergs fallförsök.

Apparaten består av en rund träskiva med axel, som passar till en rotationsmaskin (se fig.). På skivan sitter en plåt med spår och på något avstånd från denna skiva en klämmare, som fasthåller en blykula. Blykulan drages mot »jordytan» (plåten på skivan) med tillhjälp av en gummisnodd, som går genom spåret och är fäst i blykulan och apparataxeln.



Mellersta bilden visar, hur blykulan fallit mot lodpunkten, då apparaten *icke* roterat. Om apparaten under

fallet roterar i den riktning pilen på nedre bilden anger, träffar kulan öster om lodpunkten. Kulan utlöses av den på vikten *M* verkande centrifugalkraften. *Erik Nilsson.*

Nytt bevis för Euklides I: 16 och 17.

Nyare läroböcker i elementargeometri ha en benägenhet att alltmer bygga upp lärosatserna på begreppet *rät vinkel*, i det de ge en fundamental betydelse åt mittpunktsnormalens egenskaper och bygga på dem. Redan hos EUKLIDES se vi en benägenhet i den riktningen, i det att några satser om den räta vinkeln sättas före en del allmänna satser om trianglar av vilken form som helst. Det kan nu sättas i fråga om det egentligen är nödvändigt att för dessa satser referera till den räta vinkelns begrepp. Om så inte är förhållandet, kunde en mer formell avrundning givas åt systemet av grundläggande satser i geometrin genom att uppskjuta behandlingen av satserna om den räta vinkeln, tills de allmänna satserna om trianglar genomgåtts.

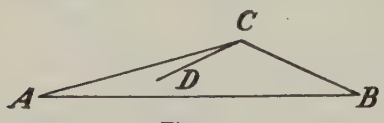


Fig. 1.

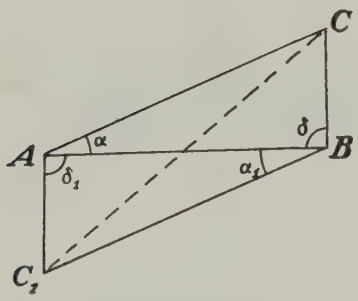


Fig. 2.

Nu visar det sig, att EUKLIDES i dessa sistnämnda satser ej har behov av begreppet »*en* rät vinkel» utan blott av begreppet »summan av två räta vinklar», d. v. s. en *rak* vinkel. Det är således onödigt att först gå igenom, hur man konstruerar en rät vinkel. Däremot behöver EUKLIDES konstruera mittpunkten av en sträcka för att bevisa satsen om yttervinkeln. Men skall man i alla händelser inflicka den konstruktionen, så kan man lika gärna taga med den likartade satsen om den räta vinkelns konstruktion. Det kunde därför vara av ett visst intresse, om man kunde bevisa satsen om yttervinkeln utan att behöva dela en sträcka mitt itu. Härigenom vunnes även den fördelen, att framställningen av andra kongruensfallet kunde uppskjutas och behandlas i samband med andra likartade satser. Jag vill här visa, att detta verkligen låter sig göra.

Hjälpsats. Varje vinkel i en triangel är mindre än en rak vinkel. Ty vore en vinkel t. ex. *C* (fig. 1) = en rak, så vore *ACB* en rät linje, vilket är orimligt. Och vore $\angle C >$ en rak,

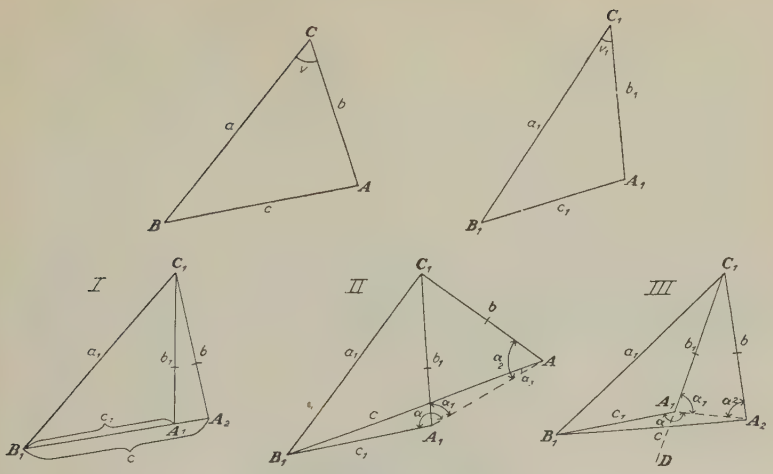


Fig. 3.

så skulle förlängningen (CD) av BC falla inuti triangeln, och då den kan dragas ut hur långt som helst, så att den kommer utanför triangeln, så måste den råka en av sidorna i ännu en punkt, vilket är orimligt.

Sats. I varje triangel (ABC) *är summan av två vinklar mindre än en rak vinkel.*

Flytta $\triangle ABC$ i läget BAC_1 (fig. 2), $\because \alpha_1 = \alpha$, $\delta_1 = \delta$. Drag CC_1. Härvid äro två olika fall tänkbara.

I. CC_1 skär AB eller dess förlängning åt B till.

I triangeln ACC_1 är $\alpha + \delta_1 <$ en rak, $\because \alpha + \delta <$ en rak.

II. CC_1 skär BA i A eller dess förlängning åt A till.

I triangeln BCC_1 är $\alpha_1 + \delta <$ en rak, $\because \alpha + \delta <$ en rak.

Anm. 1. Satsen om yttervinkeln (Eukl. I: 16) följer nu som korollarium härur.

Anm. 2. Eukl. I: 24 kan nu bevisas på följande sätt:

Antagande (fig. 3) $a = a_1$, $b = b_1$, $v > v_1$.

Påstående. $c > c_1$.

Bevis. Flyttas $\triangle ABC$ i läget $A_2B_1C_1$ och drages A_2B_1, så kunna tre fall inträffa.

I. $A_2B_1 > A_1B_1 \because c > c_1$.

II. $\alpha > \alpha_1 = \alpha_2 > \alpha_3$, $\because c > c_1$.

III. Förlängningen av C_1A_1 måste råka A_2B_1, $\because \alpha > \angle A_2A_1D$, som är trubbig (emedan α_1 är spetsig), $\because c > c_1$.

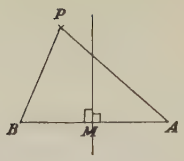


Fig. 4.

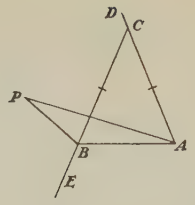


Fig. 5.

Anm. 3. Satsen om mittpunktsnormalen, $PA > PB$ (fig. 4), kan generaliseras på följande sätt: Om (fig. 5) $CA = CB$ och P befinner sig inom området $DCBE$, så är $PA > PB$. Beviset blir detsamma som i anm. 2.

Henrik Petrini.

Kromnickeltråd.

Kromnickel har flera egenskaper, som göra legeringen till ett mycket användbart material. Den höga smältpunkten (c:a 1 400°) och den även vid hög temperatur långsamma oxidationen samt det stora spec. ledningsmotståndet (c:a 1) betinga dess användning till elektriska uppvärmningsanordningar. Dessa egenskaper kunna även utnyttjas på laboratoriet. Här följa några kort skisserade exempel på olika användningar av kromnickeltråd. Då icke annat angives, har till försöken använts 0,5 mm tråd.

1. *Värmekälla för strålningsförsök.* I en träkloss borras ett hål, i vilket ett c:a 40 cm långt glasrör fastgjutes med schellack e. d. Upptill och nedtill på röret lindas några varv grov koppartråd, och på dessa trådars utstående ändar fästes en spiral av kromnickeltråd några centimeter från glasröret. Ett lämpligt antal sådana kaminer i serie kunna kopplas direkt till belysningsledningen. Blanka och sotade mässingsrör med vatten och termometer placerade några centimeter från spiralen visa snart skillnaden i ytornas absorption.

2. *Kroppars längdutvidgning.* En kromnickeltråd spännes mellan två stativ och uppvärmes elektriskt till rödglödning.

3. *Gasers värmeledningsförmåga.* En fin kromnickeltråd (0,3 mm) drages genom korkar i ändarna på kylmanteln till en Liebigs kylare och fortsättes fritt i luften ett stycke. Tråden uppvärmes genom en elektrisk ström och glöder då lika i glasröret och utanför. Strömmen brytes, och lysgas ledes genom kylarmanteln till en bunsenbrännare. Slutes strömmen på nytt, glöder tråden endast i luften. (Principen användes praktiskt för

kontinuerlig kontroll av vätehalten i kväve — väteblandningen vid ammoniaksyntes.)

I följande försök användes tråden som ersättning för platina.

4. *Lågreaktioner.* C:a 15 cm långa kromnickeltrådar insmältas i glasrör och användas för prov på Na, K etc. vid kvalitativ analys. Tråden rengöres med sandpapper eller också klippes den använda delen helt enkelt bort.

5. *Spektralanalys.* För demonstration av alkalimetallernas och alkaliska jordartsmetallernas spektra kan användas en liten gles, platt härva av kromnickeltråd. Den bör vara c:a 2 cm i diameter och de c:a 10 cm långa ändarna fästas i ett stycke blyplåt, som kan läggas på brännarröret till en horisontellt placerad mekerbrännare. Trådhärvan bör då komma ungefär 2 cm från nätet i brännarmynningen, så att detta icke förorenas av sublimerande salt. Mekerbrännarens låga bör passera obehindrat genom trådhärvan. Lågans höga temperatur gör, att betydligt större ljusintensitet erhålles än med bunsenlåga.

Den föreslagna fastsättningsanordningen för tråden möjliggör ett hastigt utbyte mot en annan tråd med ett nytt salt, och brännaren hålles genom den horisontella placeringen fullt ren, så att ett nytt, rent spektrum genast erhålles.

6. *Platinerad kromnickeltråd som katalysator.* Kromnickeltråd lindas på en glasstav till en spiral med 10 à 15 varv. Denna utdrages till c:a 3 cm längd. Ändarna fortsätta några centimeter i spiralens axel och fästas i ett par stycken 2 mm koppartråd. Änden av koppartråden smältes över en mekerbrännare till en liten kula, och i denna instickes kromnickeltråden. Spiralen glödgas elektriskt rätt kraftigt, så att den blir väl oxiderad. Sedan platinerar man den genom att doppa den i en platinaklorid-lösning och därefter upphetta den till svag rödglödning. Detta upprepas ett par gånger. Aktiviteten kan prövas genom att man håller spiralen strax under rödglödning och för in den i utströmmande lysgas, som då bör tändas.

Spiralen införes i ett glasrör, där koppartrådarna bilda genomledning genom korkarna. Till- och avlopp anordnas genom korkarna eller genom sidorör.

Spiralen upphettas elektriskt till svag rödglödning, och reaktionsblandningen ledes genom röret. En luftström genom en tvättflaska med alkohol ger aldehyd, och genom SO_2vatten efter torkning SO_3.

Ovanstående exempel torde visa, att ett par rullar kromnickeltråd lämpligen böra införlivas med laboratoriets materialförråd (se sid. 244).

Erik Löwenhamn.

Bokanmälningar.

ANNA BECKMAN, *Strålar och strålning.* Norstedts lilla bibliotek, Stockholm 1930, 110 sid., häft kr. 1: 50, inb. kr. 2: 25.

I decembernumret för 1926 av denna tidskrift anmäldes fru Beckmans »Synligt och osynligt ljus». Här föreliggande lilla bok är mycket mera kortfattad och bestämt populärt hållen, inga som helst formler förekomma. Samtidigt är den mera omfattande, i det den behandlar icke blott olika slag av elektromagnetisk strålning, utan även den s. k. korpuskulära strålningen. För denna föreslår förf. en uppdelning i *elektron*strålning, alltså innefattande katod-, β- och fotoelektrisk strålning, samt *jon*strålning, till vilken då kanal- och α-strålar räknas. Även den kosmiska strålningen behandlas.

Framställningen är alltigenom ovanligt enkel och klar och på samma gång i hög grad intresseväckande. Förståelsen underlättas genom träffande hänvisningar till läsarens egen erfarenhet. Kapitlet om den elektromagnetiska strålningens betydelse för vårt liv ger en utmärkt bild av denna strålnings samband med övriga energiformer. I det sista kapitlet redogöres på ett förvånande enkelt och åskådligt sätt för huvuddragen av ljuskvantteorien och antydes innebörden av de Broglies »materievågor» och Schrödingers »vågmekanik». Enligt sakens natur kan det endast bli frågan om en antydan.

Boken ger i det hela en synnerligt god översikt av olika former av strålning och kommer säkert att läsas med stort nöje och behållning både av gymnasiets fysikintresserade lärjungar och av undervisaren själv, som där skall finna många gott uppslag, då det gäller att lättfattligt framställa hithörande fenomen. Den kan även varmt rekommenderas åt envar, som har intresse av att följa med den moderna uppfattningen om oss omgivande naturföreteelser.

Eva Ramstedt.

De tekniska vetenskaperna, Kemisk teknologi, band I: 1, Kemiskt tekniska apparater och bränslen. Alb. Bonnier, Stockholm 1929. 385 sid., häft. kr. 38: —.

Av den stort anlagda handboken med ovanstående titel, som för några år sedan började utgivas, och som skall behandla alla sidor av tekniken med särskild hänsyn till den svenska, har

nu även avdelningen Kemisk teknologi, avsedd att omfatta fem band, utkommit med den första delen av det första bandet. Redaktörer för den Kemiska teknologien äro professorerna C. KULLGREN och W. PALMÆR samt civilingenjör S. NAUCKHOFF, Stockholm, prof. P. E. RAASCHOU, Köpenhamn, och prof. S. SCHMIDT-NIELSEN, Trondhjem. För innehållet i nu föreliggande del svara doc. E. ÖMAN och civilingenjör G. ANGEL (kemiskt tekniska apparater), civilingenjör N. FRENNE (kraft- och värmefrågor), prof. K. SONDÉN (allmän förbränningslära), överingenjör E. SPETZ (vedbränsle och eldstäder för fasta bränslen, flytande bränslen och deras användning), civilingenjör ALF LARSON (brännlorv), prof. RAASCHOU (brunkul), kommerserådet K. SIDENVALL (stenkol), överingenjör G. H. HULTMAN (gasformiga bränslen).

Ehuruväl tekniska detaljfrågor av naturliga skäl tillmätts ett visst utrymme i detta arbete, kan man icke säga, att de fått breda ut sig på överskådlighetens och läsbarhetens bekostnad; teoretiska utredningar, sakuppgifter och tabeller göra arbetet värdefullt för varje kemilärare, som vill taga kännedom om den moderna kemiska industriens förutsättningar. Hela avdelningen om bränslen är synnerligen läsvärd; i fråga om de kemiskt tekniska apparaterna må framhållas avsnittet om destillation av doc. ÖMAN, erkänd auktoritet på detta område. För innehållets vederhäftighet torde författarnas namn utgöra en fullgod garanti. Framställningen är lättläst, illustrationerna talrika och goda. Arbetet, vars fortsättning torde bliva av ännu större intresse, bör väl ingå i varje läroverks boksamling.

G. Starck.

SVERRE BRUUN og OLAF DEVIK, *Lærebog i fysikk for middelskoler*, Olaf Norlis forlag, Oslo 1928, 157 sid. + X, kr. 3: 80.

Det är med största intresse anmälaren tagit del av denna år 1928 utgivna lärobok för den norska »middelskolen». I vårt land äro läroböckerna för motsvarande stadium utformade efter tvenne principiellt olika system, representerade exempelvis av MEBIUS och MALMBORG. Den norska läroboken ansluter sig närmast till det av MALMBORG företrädda. Framställningen är koncis, lättfattlig och intresseväckande. Vetenskap och teknik ha sammanflätats i en i stort sett modern och för den levande fysiken inställd gestaltning. Någon förvåning väcker det dock, att den numera så vanliga vridspolegalvanometern icke ens blivit omnämnd; de enda förekommande strömmätningsinstrumenten äro vertikal- och kompassgalvanometrarna samt varmtrådsampèremetern (förekomsten av mjukjärnsinstrument om-

talas i en not). Att varmtrådsampèremetern fått en sådan framskjuten plats, har sin naturliga förklaring däri, att Ohms och Joules lagar behandlas före elektromagnetismen. Om voltmetern får man endast veta, att varmtrådsampèremetern lätt kan omvandlas till en dylik. I fråga om induktionen iakttaga författarna också en viss återhållsamhet. Generatorer och motorer genomgås endast schematiskt. Beskrivning och figurer av moderna dylika maskiner saknas. — Apparatur och experiment äro genomgående av mycket enkel beskaffenhet. Författarna anse det önskvärt, att försöken i så stor utsträckning som möjligt utföras av eleverna själva. I några fall, exempelvis beträffande spec. vikt, Arkimedes' lag, Boyles lag, kalorimetri och Ohms första lag meddelas formler samt enkla räkneexempel. — Ett tillägg i slutet av boken med rubriken »radio» och avsett att genomgås, om tiden så medgiver, är förträffligt hopkommet i betraktande av svårigheterna för ämnets popularisering.

Läroboken rekommenderas livligt såväl för den, som önskar en kort framställning av fysikens element, som för den pedagogiskt intresserade.

Torsten Wetterblad.

SIFFER LEMOINE, *Från mikrofonen till högtalaren.* Populärt om radio. Häftet I. Radiovågornas utbredning och räckvidd. Åhlén & Åkerlunds förlag, Stockholm 1929, 82 sid., kr. 1: 60.

Under ovanstående titel har den kände radiofackmannen, byråingenjör S. LEMOINE, påbörjat en serie populärframställningar om radio, varav första häftet föreligger. Den lilla boken avser att tillrättalägga begrepp och företeelser, som lyssnaren kan ha intresse av att veta något litet om. Förf. har på ett klart och lättförståeligt sätt framlagt ämnet under följande rubriker: Ytstrålning, Rymdstrålning, Våglängd, Räckvidd o. s. v. Synnerligen intressant och välskriven är avdelningen om den inre mottagningszonen (ytstrålningszonen), mellanzonen (interferenszonen) och rymdstrålningszonen. Boken avslutas av några fängslande notiser och tankar om utomplanetarisk radio, radioeko och ultrakorta vågor.

Några smärre inadvertenser och felaktigheter må påpekas. — Termen jon definieras (sid. 30) på ett oklart och för övrigt felaktigt sätt. Förf. sätter positiv »smådel» = jon och negativ = elektron. Men det finnes ju både positiva och *negativa joner*, och de negativa smådelarna äro därför ej alltid elektroner.

Recensenten skulle önska ett klarare särskiljande av de båda företeelserna: 1:o *kvalitetsdistortionen*, som uppkommer i den

inre zonen genom interferens mellan ytstrålningen och den reflekterade rymdstrålningen och 2:o *intensitetsvariationen*, som uppstår i den yttre zonen och har sin grund i variationen i Heavisideskiktets reflexionsförmåga. Båda dessa företeelser kallar förf. mycket riktigt »fading», men detta begrepp introduceras (sid. 35) på ett sätt som kan förvilla läsaren och komma honom att tro, att fading alltid har sin orsak i interferens.

Man motser med intresse fortsättningen av det all uppmuntran värda arbete förf. påbörjat i och med denna häftesserie i akt och mening att skingra en ofta otroligt stor okunnighet på detta område.

B. Lindwall.

JOHAN INGHE och GABRIEL JONSSON, *Övningsexempel i räkning* för inträdessökande till den femåriga realskolans första klass. P. A. Norstedt & Söner, Stockholm 1928, 24 sid., kr. 0,60.

EINAR WETTERWIK, *Övningsexempel i räkning* för inträdessökande till den *femåriga* realskolans första klass, 23 sid., kr. 0: 60. Dito för inträdessökande till den *fyraåriga* realskolans och den kommunala mellanskolans första klass, 30 sid., kr. 0: 80. C. E. Fritzes förlag, Stockholm 1930.

Här ovan presenterade exempelsamlingar för inträdessökande till realskolans klasser 1^5 och 1^4 äro försök att lösa den ingalunda lätta uppgiften att efter så få års erfarenhet av inträdesprövningar till den nyorganiserade realskolan söka uppdraga riktlinjerna för den förberedande träningen i räkning och ge en fastare bild av inträdesfordringarna än den som framgår av stadgans något diffusa formulering.

I den egenskapen hälsas häftena med glädje av alla av inträdesprövningarna berörda, lärare, elever och målsmän. Glädjen hos de båda sistnämnda grupperna är nog mera dämpad av en förklarlig bävan för att i häftena finna större än väntade anspråk på de små »provkandidaternas» prestationsförmåga.

Det torde vara små utsikter för att dessa bekymmer komma att skingras vid genombläddrandet av WETTERWIKS häften. I båda, men i all synnerhet i det som avsetts för sökande till klass 1^4, ge uppgifterna ett totalintryck av att icke blott »vara hållna i överkant av vad som fordras» (förf:s förord), utan att förutsätta en mognad och analyseringsförmåga, som rimligtvis icke kan begäras av så unga elever, varom här är fråga. Utrymmet tillåter icke att genom utförlig exemplifiering motivera detta omdöme. Utan anspråk på att ge prov på typiska drag må ett par exempel anföras på uppgifter, som måste anses alldeles för svåra.

»På en bokhylla stå 20 alldeles lika böcker, numrerade i ordning från vänster till höger. Varje bok är 1 cm 3 mm tjock, varje pärm är 1 mm. Huru långt är det då mellan första bladet i tolfte boken och sista bladet i den trettonde?» — Många bildade, äldre personer, som jag förelagt denna uppgift ha först efter åtskilliga misslyckade försök kunnat ge svaret: summan av två pärmars tjocklek, alltså 2 mm.

I samma häfte ges på uppgiften $\frac{779049}{79}$ svaret $9861\frac{30}{79}$. Oavsett det onödiga införandet av bråkstreck som divisionstecken och det olämpliga med svar i bråkform, då ju lärjungarna ej behöva ha en aning om bråk, vittnar detta och övriga divisionsexempel om, att förf. ej fäster stort avseende vid »division med rest». Han skulle ha fått en annan uppfattning, om han bevittnat det besvär som en akademiskt bildad man hade för att få reda på resten vid divisionen 700 kr : 13,50 kr. Han försökte 7000 : 135 = 51, rest 115 och 1400 : 27 = 51, rest 23. Först efter uträkningen 700 kr. — 51 · 13,50 kr. erhöll han den riktiga resten 11,50. (Han borde ha tagit $\frac{1}{10} \cdot 115$ eller $\frac{1}{2} \cdot 23$.)

Ur andra häftet (för 1^4) plocka vi: »Sätter man i en plantskola en planta på var adertonde centimeter, få 56 stycken plats i varje rad. Hur många få rum i varje rad, om mellanrummen ökas till 24 cm?» — En på grund av ofullständig formulering alltför svår uppgift. Resultatet beror ju på vilken förutsättning man gör angående plantornas placering.

Man kan invända, att medtagandet av ett även relativt stort antal svåra uppgifter kan försvaras med att de äro avsedda för särskilt begåvade lärjungar. Men med kännedom om den mänskliga naturen kan man säkert antaga, att just de svåra uppgifterna bli föremål för den intensivaste träningen (med lärares ledning), om till båtnad för elevernas framgång vid provet eller ej må lämnas osagt.

Förf. har genom uppgifternas osammanhängande numrering gjort det lätt att och i förordet sagt sig ämna komplettera exempelsamlingarna. Om härvid de onödigt svåra uppgifterna utgallrades och ersattes med lättare, skulle häftena, som, det måste ärligt sägas, bära vittne om förf:s geniala komponeringsförmåga och utsökta formuleringskonst, kunna bli mönster i sitt slag. Därtill kommer, att uppgifterna nästan utan undantag äro från matematisk synpunkt mycket intressanta och effektiva (i all synnerhet »de med ord uttryckta rena sifferexemplen») samt genom sin rikedom av kunskaper från såväl skilda ämnesområden inom skolan som olika sidor av mänsklig verksamhet utanför densamma ytterst värdefulla. De utgallrade uppgifterna skulle pryda sin plats i en lärobok för realskolan.

INGHE-JONSSONs exempelsamling för sökande till klass 1^5 gör intryck av att vara mera måttfull i anspråk på lärjungarnas mogenhet och intelligens och prutar icke av på fordringarna i fråga om färdighet i sifferräkning. Häftets stora samling rena sifferexempel upptager prov på de flesta svårigheter, med vilka

de unga eleverna bruka ha att kämpa. Som brist må antecknas frånvaron av »division med rest» av typen 1000 : 300 = 3, rest 100, d. v. s. där de i dividenden och divisorn event. strukna nollorna måste tagas med i resten. (Se f. ö. under WETTERWIK.)

På kapitlet »blandade uppgifter» ha INGHE-JONSSON ett gott urval av måttligt svåra problem, som i regel bära verklighetsprägel och äro hämtade från områden av affärs- och vardagslivet, med vilka lärjungarna torde vara förtrogna. (En fråga må dock sättas för äktheten av uppgiften om gossen, som vid vägning av en metallcylinder på cg, fick värden, som skilde på över 3 dg.)

Fem provräkningar om vardera 15 uppgifter avsluta den förträffliga exempelsamlingen.

M. Wahlgren.

Meddelande om Ny materiell, häft. 7. P. A. Norstedt & Söners Skolmateriellavdelning, Stockholm 1930, 42 sid., kr. 1: —.

Häftet inledes med en artikel av lektor WESTLIN, Helsingfors, som beskriver en apparat för bestämning av värmets mekaniska ekvivalent. Värmet alstras genom friktion i ett på en axel fästat lager, som omges av ett kalorimeterkärl, fyllt med vatten. Den kraft medelst vilken axeln kringvrides, mätes med en dynamometer. Apparaten uppges ge goda värden; felen högst 10%. Månne ej handhavandet och konstruktionen skulle bli ännu enklare, om vattenkalorimetern utbyttes mot en kalorimeter av massiv koppar? Se GUNNESON denna tidskrift årg. XIII, sid. 102. — Samme förf. beskriver en jordinduktor för bestämning av inklinationsvinkeln. Den består av ett cykelhjul av trä med upplindad tråd, vridbart kring en diameter. Strömmen uttages genom ett par släpringar på axeln; även en kommuteringsanordning finnes. Man inställer apparaten, så att ingen ström erhålles vid kringvridning; rotationsaxeln är då parallell med det jordmagnetiska fältet. Rec., som i många år använt en dylik, hemmagjord anordning, vet att den ger mycket goda värden. Förf. kunde ha tillagt, att apparaten även väl lämpar sig för bestämning av det jordmagnetiska fältets styrka; se denna tidskrift årg. III, sid. 37.

I en pedagogiskt givande uppsats beskriver adjunkt C. RENDAHL en mångfald vackra försök med en av honom förbättrad elektromagnettyp.

Ett synnerligen värdefullt bidrag lämnas av docent E. RUDBERG i en uppsats om olika galvanometertyper, deras känslig-

het och olika sätt att ange densamma. Förf. lämnar i samma artikel en redogörelse för den utom England föga beaktade universalshunten enligt AYRTON och MATHER. En god dylik från firman PYE erhålles till kr. 95: — och från samma firma en utmärkt spegelgalvanometer av stor känslighet till kr. 70: —. Denna galvanometer är dessutom av en förvånande hållbar konstruktion. Denna egenskap — hos ett liknande instrument — demonstrerade man för en del år sedan vid fabriken på det något förbluffande sättet att apparaten arreterades och slängdes utefter bordet och befanns oskadd efter manövern. Engelsmännen ha under flera år tillverkat goda och billiga shuntar och galvanometrar. Det är glädjande, att firman Norstedt genom sitt »meddelande» riktat uppmärksamheten härpå och nu tillhandahåller dylika.

Häftet avslutas med en beskrivning av en av firman utarbetad serie planscher över ångmaskinen och de vanliga typerna av förbränningsmotorer. De äro utförda som sektionsritningar, tekniskt riktigt gjorda men icke desto mindre mycket tydliga — och *billiga*.

C. E. Blom.

K. I. SETH JARL, *Repetitionskurs i algebra*. C. E. Fritzes förlag, Stockholm 1930, 127 sid., kr. 3: 25.

Boken, som enligt förordet är att betrakta som en repetitionskurs i algebra och funktionslära, innehåller en samling problem. En stor del äro lösta eller försedda med anvisningar.

På sid. 14 sökes summan av rötternas kvadrater i ekvationen $7x^2 - 11x + 4 = 0$, varvid båda leden i ekvationen $r_1 + r_2 = \frac{11}{7}$ kvadreras. Recensenten finner det för sin del fördelaktigare att använda identiteten $r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2$. Insättning av värdet på $r_1 + r_2$ innebär visserligen också kvadrering, vilket kanske ej alltid beaktas. För beräkning av $r_1^3 + r_2^3$ är en uppdelning i faktorer avgjort att föredraga framför utveckling av $(r_1 + r_2)^3$.

När det gäller kapitlet om logaritmer, ställer sig författaren på den gamla skolans ståndpunkt genom att grunda beräkningen av sifferuttryck och lösningen av exponentialekvationer på logaritmlagarna. Dylika uppgifter kunna behandlas med användning uteslutande av potenslagarna, varigenom en smidigare övergång till läran om logaritmer erhålles. På sid. 38 logaritmeras ekv. $2^{2x} = 0{,}5$, vilket är obehövligt. På sid. 72 heter det, att man genom logaritmering får x i ekvationen $1{,}03^x = 5$. Det här önskade x-värdet avläses ju direkt ur tabell.

Ex. 4 sid. 51 är ej så lyckligt valt, då man genom att fälla höjden mot en av de lika sidorna omedelbart erhåller maximivärdet. Ex. 9 sid. 57 förefaller väl svårt och kunde lämpligen föregåtts av ett enklare i samma stil. Ex. 3 sid. 62 borde väl ha lösts genom att använda symmetriska beteckningar på seriens termer.

I kapitlet planimetri saknas formlerna för höjden i och ytan av en liksidig triangel. De spela dock en viss roll. Formeln för den vidskrivna cirkelns radie nämnes ej heller. Författaren använder vid flera tillfällen den seglivade formeln för kordan för halva bågen. Skall denna formel läras utantill? Beträffande ex. 7 sid. 86 märkes, att två fall äro möjliga. Ytan kan också bli 60 m^2. Ex. 29 sid. 106 lösas vackrast med användande av kordsatsen. — Exemplen synas med få undantag vara tagna ur välbekanta läroböcker och problemsamlingar. *S. Bågman.*

Gradualavhandlingar.[1]

OLOF SJÖSTRAND, *Sur le problème de M.* GOURSAT *pour les équations aux dérivées partielles du second ordre ou de l'ordre supérieur*, Göteborg 1929, 75 sid., Chalmers tekniska instituts 100-årsskrift. Disp. i Uppsala 1 febr. 1930. Opponenter: professor E. HOLMGREN och fil. lic. E. KRONSJÖ.

Förf. uppställer följande allmänna problem, som han kallar »GOURSATs problem», nämligen att bestämma den lösning till en partiell differentialekvation av n:te ordningen med 2, 3 eller flera oberoende variabler, som har uppgivna värden på n st. varandra skärande kurvor, ytor eller »hypersurfaces». GOURSAT löste ursprungligen detta problem för ekv.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Förf. antager givna funktioner analytiska och löser uppgiften

1:o) för det fall att $n = 2$ och antalet oberoende variabler är hur stort som helst (ekv. och de givna »hypersurfaces» äro av den allmännaste form).

2:o) för det fall att antalet oberoende variabler är 2 och ordningstalet vilket som helst (ekv. är homogen med konstanta koefficienter, randvärdeskurvorna äro räta linjer, som skära varandra i *en* punkt).

Förf. antager därefter givna funktioner kontinuerliga och löser problemet för lineära ekv. med 2 oberoende variabler av

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande författares egen hand.

1:o) andra ordningen. Vissa specialfall (kurvorna bilda spets i sammanlöpningspunkten eller ha i denna en eller två tangenter, som äro karakteristiker) behandlas.

2:o) tredje ordningen. Av de tre randvärdeskurvorna äro två karakteristiker, den tredje går genom dessas skärningspunkt.

FRITZ KIESSLING, *Eine Methode zur approximativen Berechnung einseitig eingespannter Druckstäbe mit veränderlichem Querschnitt*, Göteborg 1930. Disp. i Uppsala den 15 febr. 1930. Opponenter: docent EINAR HOGNER och fil. kand. JACOB ISANDER.

Om en i sin ena ända infästad rak, tunn stav påverkas av tryckkrafter i axelns riktning, inträder vid en viss belastning den s. k. knäckningen. Så snart det rör sig om fall, där staven icke är prismatisk eller där belastningen fördelar sig längs hela staven, bliva de exakta beräkningarna mycket besvärliga eller rentav omöjliga. I praktiken, där dessa problem ofta förekomma, måste man därför arbeta med approximationsmetoder. Emellertid saknades en praktiskt användbar felbestämningsmöjlighet. Genom att behandla »energimetoden» med integralekvationer har det lyckats förf. att utarbeta en approximationsmetod, som icke blott kan skötas med mycket enkla räkningar utan dessutom möjliggör en uppskattning av felet på en eller annan procent när. Flera mycket enkla men skarpa formler erhållas. Metoden lämpar sig också mycket bra för grafisk beräkning och kan tillämpas även på fall, där stavformen endast är given genom konstruktion, alltså icke genom ekvation.

BROR JONZON, *Über die Gruppen birationaler Transformationen der elliptischen und der hyperelliptischen Kurven in sich.* Uppsala 1930, 65 sid. Opponenter: professor A. WIMAN och fil. lic. C.-E. SJÖSTEDT.

Varje entydig transformation av en rationell kurva i sig motsvaras av en lineär substitution av den parameter, i vilken koordinaterna kunna rationellt uttryckas. De ändliga grupperna av entydiga transformationer, som överföra rationella kurvor i sig själva, äro därför enkelt isomorfa med de ändliga grupperna av lineära substitutioner i en variabel (cykliska grupper, dieder-, tetraeder-, oktaeder- och ikosaedergrupper), vilka grupper först uppställts av KLEIN. Det råder ett nära sammanhang mellan dessa grupper och de hyperelliptiska kurvornas transformationsgrupper, i det att varje grupp av entydiga transformationer, som överföra en hyperelliptisk kurva i sig själv, är 2 : 1-isomorf med en av de nyssnämnda grupperna. I föreliggande avhandlings första kapitel uppställas från denna utgångspunkt och med stöd av tidigare undersökningar av HURWITZ och av WIMAN

de till hyperelliptiska kurvor hörande birationella transformationsgrupperna.

En elliptisk kurva tillåter ett oändligt antal entydiga transformationer i sig. Dessa motsvaras av hela lineära transformationer av den på kurvans Riemannska yta existerande överallt ändliga integralen av första slaget. De elliptiska kurvornas birationella transformationsgrupper äro sålunda enkelt isomorfa med grupperna av dessa transformationer, vilka i allmänhet kunna uttryckas under formen $u' = \pm u + c$. I harmoniska och ekvianharmoniska fallen tillkomma substitutioner av formen $u' = \pm iu + c$ och av formen $u' = \pm \varepsilon^{\pm 1} u + c$ resp. ($\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$; c en godtycklig konstant). Med utgångspunkt från dessa transformationer uppställas i avhandlingens andra kapitel de elliptiska kurvornas ändliga transformationsgrupper, sammanförda i vissa typer. Från andra utgångspunkter ha DYCK och BURNSIDE tidigare bestämt ifrågavarande grupptyper.

Reella elliptiska kurvor, d. v. s. elliptiska kurvor, i vilkas ekvationer koefficienterna ha reella värden, tillåta transformationer av »andra slaget». (Beträffande dessa transformationer hänvisas till KLEIN, Riemann'sche Flächen II, sid. 132). De utvidgningar av dessa kurvors transformationsgrupper, som kunna erhållas genom tillfogande av dylika transformationer, framställas i avhandlingens tredje kapitel. Särskilt intresse tilldraga sig de typer av grupper med 2-potens ordning som här erhållas. — De motsvarande utvidgningarna av de rationella kurvornas ändliga transformationsgrupper äro förut kända (WEBER, Algebra II, 2 Aufl., § 78).

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska kemistsamfundet.

Ur innehållet i årg. XLII, n:r 2. CHR. BARTHEL, Om ostmognadens biokemi.— N:r 3. H. LUNDEGÅRDH, Den kvantitativa spektralanalysen som allmän mikrokemisk metod.

Industritidningen Norden. Årg. 1930, häft. 9—12.

Ur innehållet. Uppfinningars kulturvärde. — Paulins höjdmätare. — Telefotografen. — En kris inom fysiken. — Spårvagnens rehabilitering. — Oljebränsle ur skiffer. — Vågor och korpuskler i den nya fysiken.

Era. Årg. 1930, häft. 3 o. 4.

Ur innehållet. Mineraloljan inom elektrotekniken. — Strålande värme på elektrisk väg. — Elektriska strykjärn. — Sveriges utbyggda vattenkraft år 1930. — Många tekniska nyheter. — Värdefull annonsavdelning.

Radioamatören. Årg. VII, 1930, häft. 3, 4 o. 5.

Ur innehållet. Bildradiomottagare. — En ny katodstråloscillograf. — En ny känslig fotocell. — Glimljusspänningsdelaren.

Radio och Grammofon. Årg. VIII, 1930, häft. 3—7.

Ur innehållet. Rundradio på kortvåg. — Antennens placering. — Musiken från matematisk synpunkt. — Storstationen i Spånga. — Brumning i växelströmsanslutna mottagare, orsaker och avhjälpande. — Radiotekniska nyheter.

Matematisk Tidsskrift. København, Aarg. 1930, 1 Hefte.

Ur innehållet i avd. A. Fr. Fabricius-Bjerre, Om nogle specielle sfæriske trekanter og keglesnit. — E. Torsting, Om det historiske i matematikundervisningen. — Opgaver. Ur avd. B. Fr. Fabricius-Bjerre, En elementært defineret, algebraisk flade af 6. orden. — J. F. Steffensen, Om Sandsynligheden for at Afkommet uddør. — Litteraturanmeldelser.

Norsk matematisk Tidsskrift. Oslo, 12 Årg. 1930, 1 hefte.

Ur innehållet. Almar Næss, Zur nomographischen Lösung sphärischer Dreiecke mit Anwendungen auf Navigationsprobleme. — Boganmeldelser. — Opgaver.

Kataloger m. m.

De moderna cellulosalackerna kunna anbefallas åt våra läroverks föreståndare för institutionerna för kemi och fysik. De äro snabbtorkande och giva en hård, för de flesta lösningsmedel okänslig yta. Red. har med gott resultat använt svart lack för laborationsbord och metall, aluminiumbrons för metall. Dylika lacker tillverkas nu även inom landet av firman W. Becker, som däröver utgivit en utförlig katalog med arbetsbeskrivning: Beskrivning över ytbehandlingsmetoden med »*Beckolac*» och »*Beckoemalj*».

Tillit. Ett annat ytbetäckningsmedel, som kan rekommenderas, är det av firman H. Tillquist saluförda »*Tillit*», som innehåller kautschuk, asfalt och naturbitumen. Det förekommer i åtskilliga varieteter, såväl syrefasta som alkalifasta m. m. samt i ett stort antal olika färger. Tillit torkar likaledes snabbt och har av red. med gott resultat använts som rostskydd och till målning av förvaringsskåp för konc. syror, vilka som bekant hastigt fördärva vanlig målning.

Kromnickeltråd. Prislista upptagande dimensioner, vikt, spec. motstånd, temp. koeff., maximal belastning m. m. kan erhållas från firman Frank Malmberg, Brunkebergstorg 13, Stockholm. En rulle om 100 g, 0,5 mm, kostar kr. 3: 90.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

395) En gammal kortkonst lyder: Tag en blandad kortlek, lägg ned första kortet och bilda en hög genom att, utgående från det första kortets valör (äss = 1; kung = 13), räkna till 13. (Är t. ex. det första kortet en knekt, räknar man 11, 12, 13, så att högen kommer att innehålla 3 kort.) Med de återstående korten bildas på samma sätt nya högar, tills återstoden ej räcker till en fullständig hög. Är nu högarnas antal n och antalet återstående kort p, så blir summan av valörerna på de understa korten i högarna

$$S = 13(n - 4) + n + p.$$

Bevisa detta. *Bx.*

396) Cirkeln (K) ligger helt och hållet inom cirkeln (L). Tangenten i en godtycklig punkt C på (K) skär (L) i A och B. Finnes någon punkt i planet, varifrån CA och CB alltid synas under lika vinklar? *X.*

397) A är toppen av en i en cirkel inskriven likbent triangel ABC. Parallellt med AB drages en linje, som skär AC i E och den mindre av de bågar, vari periferin delas av AC i F. Sök maximum av EF. *C. H.*

398) Att upprita en triangel, då man känner basen, höjden mot basen samt skillnaden mellan basvinklarna. *A. H. P.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.[2]

399) Upplös i faktorer uttrycket

$$xyz + (x + y)(y + z)(z + x).$$

Svar: $(x + y + z)(xy + xz + yz)$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 399—401 äro insända av A. H. P.; uppg. 402—403 av B. N. och uppg. 404—412 av adjunkt T. EDQVIST, Visby.

400) Bevisa, att om i en triangel vinkeln A är dubbelt så stor som vinkeln B, så är $a^2 - b^2 = bc$.

401) Bevisa, att om $\cos \alpha = \frac{1}{8}$ och $\cos \beta = -\frac{9}{16}$ och α och β äro spetsiga vinklar, så är $3\alpha + 2\beta = 360°$.

402) De fyra ellipssegment, som ligga utanför den rektangel, vars hörn äro parametrarnas ändpunkter, äro lika stora. Bestäm ellipsens excentricitet.

Svar: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

403) Två konjugathyperblar äro givna. Parameterkordorna ses från medelpunkten under vinklarna $2\alpha_1$ och $2\alpha_2$. Excentriciteterna äro resp. e_1 och e_2. Bevisa, att

$$e_1 + e_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2).$$

404) A sade till B: Jag är nu 6 ggr så gammal som du var, då du var 6 ggr så gammal som jag då var. Hur gamla voro A och B?

Svar:

A	B
36	41
72	82

405) Lös systemet $\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y} &= 2\sqrt{3} \\ x + y &= 120° \end{aligned}\right\}$.

Svar:

x	$96°$	$24°$	$168°$	$-48°$	$+ n \cdot 360°$
y	$24°$	$96°$	$-48°$	$168°$	$- n \cdot 360°$

406) Ett cylindriskt kalorimeterkärl, som rymmer 400 cm^3, är så dimensionerat, att när det till $\frac{2}{3}$ är fyllt med en vätska, dennas totala begränsningsyta är så liten som möjligt. Beräkna kärlets basradie och höjd.

Svar: Radien = 3,49 cm;
höjden = 10,47 cm.

407) Vilken figur skall man klippa ut ur ett stort pappersark, om man därav vill göra en lampskärm i form av en stympad kon med diametrarna 15 cm och 36 cm och med sidan 21 cm?

Svar: Hälften av en cirkelring med radierna 36 cm och 15 cm.

408) Jorden antages vara en sfär med medelpunkten O och radien $= R$. Punkterna A och B på jordytan ha latituderna α och β resp. Skillnaden mellan deras longituder är v.

a) Beräkna vinkeln AOB.

b) Beräkna vinkeln γ mellan triangelytan AOB och ekvatorsplanet.

c) Beräkna längden av en storcirkelbåge genom A och B.

d) Vilket är kortaste avståndet mellan Stockholm ($\beta = 59°21'$ n. br., $\lambda = 18°$ ö. l.) och Peking ($\beta_1 = 40°$ n. br., $\lambda_1 = 116°$ ö. l.)? $R = 638$ mil.

e) Beräkna latituden för den nordligaste punkten på denna väg.

Svar: Sätt $\angle AOB = x$, så fås

a) $\cos x = \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta \cos v$,

b) $\cos\gamma = \dfrac{\cos\alpha \cos\beta \sin v}{\sin x}$,

c) $\dfrac{\pi R x}{180}$ eller $\dfrac{\pi R(360 - x)}{180}$,

d) 669 mil,

e) 63°,5 n. br.

409) En smörhandlare väger upp smör i nominella 1-kilobitar på en balansvåg. Han låter vid varje ny vägning smörbiten och kilogramvikten byta vågskål. Hur mycket har han efter n vägningar vunnit eller förlorat härigenom om *a*) vågarmarna äro lika långa, men vågskålarna olika tunga, *b*) om vågskålarna äro lika tunga, men vågarmarna olika långa?

Svar: *a*) Vågskålarnas vikter P och Q; $(P > Q)$.

Om n är ett jämnt tal, ta vinst och förlust ut varandra.

Om n är ett udda tal, blir det en vinst $= P - Q$, om sista vägningen har ägt rum på den tyngre vågskålen, i motsatt fall en lika stor förlust.

b) Vågskålsvikten $= P$. Vågarmarnas längder äro för A-skålen $= a$ och för B-skålen $= b$; $(a > b)$.

Om n är ett jämnt tal, blir det en förlust

$$= \frac{n(a-b)^2(1+P)}{2ab}.$$

Om n är ett udda tal och sista vågningen skett på B-skålen, blir förlusten

$$= \frac{(a-b)(1+P)}{2ab}\{(n-1)(a-b) + 2a\}.$$

Om sista vägningen skett på A-skålen, blir förlusten

$$= \frac{(a-b)(1+P)}{2ab}\{(n-1)(a-b) - 2b\}.$$

Förlusten blir i detta fall neg., d. v. s. vinst inträder, om $n < \dfrac{a+b}{a-b}$.

410) En fluga kryper omkring på golvet i ett kubiskt rum med 2 meters kantlinje. Angiv, var flugan skall befinna sig för

att summan av kvadraterna på dess avstånd från takets fyra hörn skall vara *a*) så liten som möjligt, *b*) så stor som möjligt.

Svar: *a*) I golvets mittpunkt, *b*) i något av rummets hörn.

411) Beräkna asymptoterna till kurvan $y^2 = \frac{4x^4}{x^2 + x - 2}$.

Svar: $x = 1$; $x = -2$; $y = 2x - 1$; $y = -2x + 1$.

412) Konstruera kurvan $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

Lösningar till uppg. 347—350.

347) *Lös ekvationen*

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + r = 0.$$

C. A. Mebius.

Sätt $x = y + z$, så erhålles efter transformation

$$y^5 + z^5 + 5(y^3 + z^3)(yz + p) + \\ + 5(y + z)(2y^2z^2 + 3pyz + p^2) + r = 0;$$

y och z kunna nu underkastas villkoret

$$yz = -p,$$

varefter ekvationen får formen

$$y^5 + z^5 = -r.$$

Kombineras denna med $yz = -p$, erhålles för bestämmande av y^5 och z^5 t-ekvationen

$$t^2 + r \cdot t - p^5 = 0,$$

varav

$$t = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + p^5}.$$

Rötterna kunna framställas under formen

$$x_1 = y + z$$
$$x_2 = y \cdot e^{\frac{2\pi i}{5}} + z \cdot e^{\frac{8\pi i}{5}}$$
$$x_3 = y \cdot e^{\frac{4\pi i}{5}} + z \cdot e^{\frac{6\pi i}{5}}$$
$$x_4 = y \cdot e^{\frac{6\pi i}{5}} + z \cdot e^{\frac{4\pi i}{5}}$$
$$x_5 = y \cdot e^{\frac{8\pi i}{5}} + z \cdot e^{\frac{2\pi i}{5}},$$

där $y = \left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + p^5}\right)^{\frac{1}{5}}$ och $z = \left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + p^5}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Diskussionen av rötterna är analog med diskussionen av den allmänna tredjegradsekvationen.

Löst av *Åke Pleijel.*

348) *P och P_1 äro ändpunkterna av en parameter i en ellips. Om den cirkel, som tangerar ellipsen i P och P_1, går genom centrum, så innehålla normalerna i P och P_1 var sin av topparna på lillaxeln.* *X.*

Med sedvanliga beteckningar är ekvationen för ellipsnormalen i $\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$

$$y - \frac{b^2}{a} = \frac{a}{c}(x - c),$$

och den avskär då av y-axeln ett stycke av längden $z = \frac{c^2}{a}$. I den triangel, som brännpunktsradierna från P bilda med x-axeln, äro sidorna $2c$, $a - \frac{c^2}{a}$ och $a + \frac{c^2}{a}$, och bissektrisen från P, vars längd kallas u, delar då sidan $2c$ i styckena $c + u$ och $c - u$. Alltså fås

$$u^2 = \left(a - \frac{c^2}{a}\right)\left(a + \frac{c^2}{a}\right) - (c - u)(c + u),$$

vilket ger $c^2 = (a - z)(a + z)$ och således $z = b$. Normalen i P går alltså genom toppen $(0, -b)$ på lillaxeln. Motsvarande gäller tydligen för P_1. *B—r.*

Även löst av *Ed. Sn.*

349) *Konstruera de tangenter till cirkeln $x^2 + y^2 - 2ry = 0$, för vilka det mellan axlarna liggande stycket är så kort som möjligt.* *X.*

Vi beteckna origo med O, cirkelns centrum med A och de punkter, där tangenten skär x- och y-axeln med resp. B och C. Vidare sättes $OB = z$, $BC = u$ och $\angle ABO = v$; $\angle ACB$ blir då $= 90° - 2v$. Alltså fås

$$z = r \cot v; \quad u = \frac{z}{\cos 2v} = \frac{r \cot v}{\cos 2v};$$

$$\frac{du}{dv} = -\frac{r}{\sin^2 v \cos 2v} + \frac{2r \cot v \sin 2v}{\cos^2 2v}.$$

Sättes $\frac{du}{dv} = 0$, fås $\cos 2v = \sin^2 2v$ och $\cos 2v = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Av problemets natur framgår, att u då blir minimum. Man får $\sin ACB = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, d. v. s. $AC = \frac{r(\sqrt{5} + 1)}{2}$ och konstruktionen blir följande:

Punkten $\left(0, \frac{3r}{2}\right)$ tages till medelpunkt för en cirkel, som går genom (r, r). Denna cirkel skär y-axeln i C_1 och tangenterna från C äro de sökta. Löst av *B—r.*

350) *Sök orten för skärningspunkterna mellan tangenterna från två fasta punkter till en cirkel, vars medelpunkt rör sig utefter punkternas föreningslinje, och vars diameter är lika med avståndet mellan de båda nämnda fasta punkterna.* *Iter.*

De fasta punkterna äro $(\pm a, 0)$ och cirkelns ekvation $(x-z)^2+ + y^2 = a^2$. Tangenternas ekvationer bli då $y = \frac{a(x \pm a)}{\sqrt{z^2 \pm 2az}}$. Härur fås $z^2 \pm 2az = \frac{a^2(x \pm a)^2}{y^2}$ och genom addition och subtraktion av dessa $z^2 = \frac{a^2(x^2 + a^2)}{y^2}$ och $4az = \frac{a^2 \cdot 4ax}{y^2}$. Ortens ekvation blir då $\frac{a^2x^2}{y^2} = x^2 + a^2$; den blir en »kolspetskurva» med dubbelpunkt i origo och asymptoterna $y = \pm a$.

Löst av *B—r.*

Om en matematisk studentuppgift.

Den sista uppgiften i matematikskrivningen å latinlinjen v. t. 1929 hade följande lydelse.

I en triangel ABC belecknas sidorna med a, b och c så, att a är den sida, som står mot vinkeln A, o. s. v. Visa, att om vinkeln B är 60° större än vinkeln C, så är

$$(b^2 - c^2)^2 = a^2(b^2 + c^2 - bc).$$

Följande lösning är åtskilligt enklare än den som angavs i tidskriftens anvisningar (årg. XII, sid. 252).

Upprita den omskrivna cirkeln och inskriv i denna triangeln A_1BC, kongruent med triangeln ABC. Drag $A_1A\ (= y)$; cosinusteoremet ger $(\angle\, ABA_1 = 60°)$

$$y^2 = a^2 + b^2 - bc.$$

Av ptolemeiska satsen, tillämpad på fyrhörningen $ABCA_1$, erhålles

$$b^2 - c^2 = ay,$$

varmed påståendet är bevisat. *C. E. B.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna V. T. 1930.[1]

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. I en rätvinklig triangel är hypotenusan $= a$ och medianen mot den ena kateten $= m$. Beräkna kateterna.
2. I triangeln OAB är vinkeln $O = 60°$, sidan $OA = 3$ cm och sidan $OB = 4$ cm. Man förlänger BO åt O till ett stycke $OC = 5$ cm och sammanbinder C med A. Beräkna vinklarna i triangeln ABC.
3. En aritmetisk serie innehåller 20 termer. Summan av de 10 första termerna är dubbelt så stor som summan av de följande 10 termerna. Vidare är summan av alla termer med udda ordningsnummer (alltså den första, den tredje o. s. v.) 31. Vilken är serien?
4. I en regelbunden åttahörning med sidan $= 1$ cm är inskriven en kvadrat, vars sidor äro parallella med sidor i åttahörningen. Beräkna kvadratens ytinnehåll.
5. Två raka cirkulära cylindrar hava lika stora volymer och lika stora totala ytor (de plana begränsningsytorna inberäknade) men olika basradier. I den ena cylindern äro radien och höjden vardera 1 dm. Huru stora äro de i den andra cylindern?
6. I ekvationen

$$x^2 + ax - \frac{4}{9} = 0$$

kan a bestämmas så, att av ekvationens båda rötter den ena kan tagas till första term och den andra till kvot i en konvergent oändlig geometrisk serie, vars summa är lika med de båda rötternas summa. Bestäm a samt seriens första term och kvot.
7. En sfär och en kub hava samma medelpunkt, och hälften av sfärens yta ligger utanför kuben. Huru stor är sfärens radie, uttryckt i kubens kantlängd?
8. I en triangel ABC drages bissektrisen till vinkeln A; den skär BC i D. Genom D drages perpendikeln till AD; den skär AB i E. Beräkna längden av stycket AE uttryckt i sidorna $AB = c$, $AC = b$.

[1] Fullständiga lösningar återfinnas i Svenska Dagbladet för den 6 och 12 april 1930.

Resultat: **1.** $\sqrt{\frac{4m^2 - a^2}{3}}$ och $2\sqrt{\frac{a^2 - m^2}{3}}$. **2.** 21°,79; 46°,10 och 112°,11. **3.** Serien är 4,9; 4,7; 4,5 . . . 1,1. **4.** $1{,}5 + \sqrt{2} = 2{,}914$ cm². **5.** Bottenradien $= \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}618$ dm; höjden $= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2{,}618$ dm. **6.** $a = -1$; första termen $= \frac{4}{3}$ och kvoten $= -\frac{1}{3}$. **7.** $\frac{3}{5}$ av kubens kant. **8.** $AE = \frac{2bc}{b + c}$. Löses t. ex. på följande sätt. Sätt $AE = x$ och drag $CF \parallel DE$; CF råkar AB i F. Man har $AF = b$, $EF = x - b$ och $BE = c - x$ och erhåller ur likformiga trianglar $\frac{c - x}{x - b} = \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$, varav $x = \frac{2bc}{b + c}$. Eller drag i triangeln ADE medianen MD från hypotenusans mittpunkt M. Då blir $MD = \frac{x}{2}$ och $MD \parallel AC$; $\because MD : AC = MB : AB$ o. s. v.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. Två vinklars summa är 130°, och deras sinus förhålla sig till varandra som 3 till 2. Vilka äro dessa vinklar?
2. Bestäm alla värdepar x, y, som satisfiera ekvationssystemet
$$\begin{cases} 10x^3 + 62xy^2 + 195 = 0, \\ 10y^3 + 62x^2y + 195 = 0. \end{cases}$$
3. Man betraktar ett halvklot, en rak cirkulär kon och en rak cirkulär cylinder. Klotets och cylinderns radier samt konens bottenradie äro alla lika med r. Om konens och cylinderns höjder väljas lämpligt, så bilda volymerna av halvklotet, konen och cylindern, tagna i denna ordning, geometrisk serie, samtidigt som deras totala ytor (de plana begränsningsytorna inberäknade) bilda aritmetisk serie. Huru stora skola då konens och cylinderns höjder vara?
4. Bevisa, att medelproportionalen till de båda från en ellips' brännpunkter mot en godtycklig tangent till ellipsen dragna perpendiklarna är lika med ellipsens mindre halvaxel.
5. Bestäm maximum och minimum för funktionen
$$\frac{1 + 2x}{(1 + x + x^2)^2}.$$

6. En rät linje rör sig så, att den ständigt tangerar parabeln
$$y^2 = 2px .$$
Linjen skär parabeln
$$y^2 = -px + a$$
i två punkter P och Q. Sök orten för mittpunkten av sträckan PQ.

7. Bestäm vinkelkoefficienterna för de kordor i hyperbeln
$$2x^2 - 3y^2 = 1 ,$$
vilka hava den egenskapen, att kordan bildar en vinkel av 45° med den diameter, som delar kordan mitt itu.

8. Från två orter, vilka ligga rätt i norr och söder från varandra med en breddskillnad av 8°54′, observeras en meteor i det ögonblick, då den befinner sig mellan dem och i deras meridianplan. De höjdvinklar, på vilka meteoren då synes från de båda orterna, befinnas vara 9°30′ och 14°20′. Beräkna härur meteorens höjd över jordytan. Jorden antages sfärisk och dess radie = 6 370 km.

9. Konstruera en triangel ABC, då man känner vinkeln A, sidan BC samt längden av den linje, som förenar C med mittpunkten av AB.

Resultat: **1.** $x = 88°,22 + n \cdot 180°$; $y = 41°,78 - n \cdot 180°$.

2.

x	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}(1 \pm i\sqrt{3})$	$\frac{1}{4}(1 \pm i\sqrt{3})$	$-\sqrt[3]{\frac{65}{24}}$	$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{65}{24}}(1 \pm i\sqrt{3})$
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}(1 \pm i\sqrt{3})$	$\frac{5}{4}(1 \pm i\sqrt{3})$	$-\sqrt[3]{\frac{65}{24}}$	$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{65}{24}}(1 \pm i\sqrt{3})$

Lika tecken sammanhörande. **3.** Konens höjd $= r\sqrt{15}$ och cylinderns $= \frac{5r}{2}$ eller konens höjd $= r\sqrt{3}$ och cylinderns $= \frac{r}{2}$. **5.** $y_{max} = 1$ för $x = 0$; $y_{min} = -1$ för $x = -1$. **6.** Parabeln $y^2 = -\frac{p}{4} \cdot x$. **7.** ± 2; $\pm \frac{1}{3}$. **8.** C:a 120 km; noggrannare 123 km.

9. Konstruera på BC ett cirkelsegment, som innehåller vinkeln A, och upprita en cirkel med radien från B som diameter. Denna cirkel är geometriska orten för mittpunkterna till alla kordor genom B.

Uppgifter i fysik.

1. Vid en Atwoods fallmaskin väga de vid snörets ändar hängande vikterna A och B resp. 375 och 345 g. Under det systemet först fasthålles i jämvikt, lägges på vikten B en

tilläggsvikt C på 80 g, varpå systemet får börja fritt röra sig utan begynnelsehastighet. Sedan vikterna förflyttats 1 m, avlyftes automatiskt tilläggsvikten C. Huru lång sträcka fortsätta därefter vikterna A och B att röra sig i oförändrad riktning, innan de stanna och vända? Snörets längd ovanför vikten A liksom det fria utrymmet under vikten B äro tillräckliga för att hela tiden tillåta systemets fulla rörlighet. Friktionen ävensom hjulets och snörets inflytande lämnas utan avseende.

2. En likarmad våg uppbär på den ena sidan en vågskål och på den andra en blykula, som hänger i ett långt, fint snöre och har en radie av 5 cm. Vågskålen belastas, så att vågen är i jämvikt. Under kulan placeras därefter en stor homogen sfär av bly med en radie av 200 cm, så att dess medelpunkt befinner sig på samma vertikala linje som kulans. Avståndet mellan kulans och sfärens medelpunkter är 210 cm, när vågen är i jämvikt. Kulan och sfären attrahera varandra med en kraft (k), som enligt Newtons lag har storleken

$$k = C\frac{mm_1}{r^2},$$

där m och m_1 äro kulans och sfärens massor och r är avståndet mellan deras medelpunkter. Om storheterna k, m, m_1 och r uttryckas i *C.G.S.*-enheter, är konstanten $C = 6{,}7 \times 10^{-8}$. Huru stor vikt skall läggas på vågskålen, för att vågen åter skall komma i jämvikt? Man behöver endast taga hänsyn till attraktionen mellan kulan och sfären. Spec. vikten för bly är 11,3, och accelerationen vid fritt fall är 981 cm/sek^2.

3. I ett järnstycke finnes en urborrning i form av en rät, cirkulär kon, vars höjd, som vid 0° C är 8 cm, står vertikalt. I denna urborrning hälles kvicksilver. När temperaturen är 0° C, är vertikala avståndet mellan konens övre rand och kvicksilvrets övre, horisontella yta 1 cm. Huru stort blir detta avstånd, då hela apparaten uppvärmes till 60° C? Volymsutvidgningskoefficienterna äro: för kvicksilver 0,000181, för järn 0,000034.

4. En järnstång fastklämmes vid mitten med tillhjälp av en skruvtving. Staven försättes genom gnidning i longitudinella svängningar, varvid en ton uppkommer. Vilken längd bör staven hava, då man önskar, att den skall giva tonen trestrukna e? Ljudets fortplantningshastighet i järn är 5 000 m/sek, och ettstrukna a har svängningstalet 435.

5. Ett smalt knippe, bestående av parallella och horisontella ljusstrålar, infaller mot en plan, vertikal spegel, reflekteras

mot denna och träffar en tunn positiv lins, vars optiska huvudaxel har sådan riktning, att strålarna sammanbrytas till linsens brännpunkt. Spegeln vrides därefter en vinkel av 1° kring en vertikal axel, belägen i dess eget plan. Strålarna brytas då tillsammans till en annan punkt i linsens fokalplan. Huru långt från fokus ligger denna punkt, då linsens brännvidd är 20 cm? I båda fallen anses det knippe, som träffar linsen, bestå av centrala strålar.

6. Ett termoelement består av en konstantantråd AB och två vid denna fastlödda koppartrådar AC och BD. Temperaturdifferensen mellan de båda lödställena A och B är konstant. Punkterna C och D äro fästade vid var sin klämskruv till ett vridspoleinstrument med ett inre motstånd av 10 ohm. På instrumentet avläses då ett utslag av 100 skaldelar. Därefter inkopplas mellan instrumentets klämskruvar en shuntledning med ett motstånd av 2 ohm. Utslaget sjunker då till 90 skaldelar. Beräkna motståndet i termoelementet CABD. Strömstyrkan i instrumentet är proportionell mot utslaget.
7. En shuntdynamo levererar likriktad ström till en grupp på 50 parallellkopplade glödlampor. Spänningen på lamporna är därvid 120 volt och effekten i varje lampa är 60 watt. Anslutningsledningarna från maskinens poler till lampgruppen hava vardera ett motstånd av 0,1 ohm. Motståndet i ankarets lindning är 0,08 ohm, och motståndet i fältmagneternas lindning är 100 ohm. Huru stor blir sammanlagda värmeutvecklingen per sekund i ankarets och fältmagneternas lindningar? 1 wattsekund = 0,24 gramkalorier.
8. Redogör för katodstrålarnas framställning och viktigaste egenskaper.

Resultat: **1.** 1,5 m. **2.** 3,47 mg. **3.** 0,98(01) cm. **4.** $\frac{500}{261} = 1{,}916$ m.

5. $20 \cdot \operatorname{tg} 2° = 0{,}698$ cm. **6.** $\frac{5}{22} = 0{,}227$ ohm. **7.** 50,73 gkal/sek.

Realskolexamen V. T. 1930.

Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$\frac{x^2 - 30x + 2}{6x^2 - 6} + \frac{3x + 2}{2x - 2} - \frac{5x - 1}{3x + 3} = 0.$$

2. En ingenjör A och två affärsmän B och C hava bildat bolag för att tillverka och försälja en av A uppfunnen apparat. A insätter i företaget 20 000 kr, B 30 000 kr. och C 50 000 kr. Vidare överenskommes, att A, såsom uppfinnare, skall hava 18 % av vinsten och att B, som sköter affärerna, skall hava 7 % av vinsten i provision. Resten utdelas till de tre bolagsmännen i förhållande till deras insatser. Hur mycket får var och en ett år, då vinsten är 16 400 kr.?
3. Ett åkerfält har formen av en triangel ABC, där $AB = 108$ m, $AC = 144$ m och $BC = 180$ m. Från en punkt D på AB, belägen 48 m från B, vill man tvärsöver fältet sätta en gärdesgård DE, parallell med BC. Hur lång blir gärdesgården?
4. En bank höjer ett år inlåningsräntan fr. o. m. den 1 april till kalenderårets slut med $\frac{1}{2}$ %. Vilken var räntefoten före den 1 april, om räntan på 760 kr. under kalenderåret uppgår till 33 kr. 25 öre?
5. En person lånade den 1 februari ett år 11 000 kr. mot $6\frac{1}{2}$ % ränta och inköpte för denna summa 40 stycken aktier å nominellt 300 kr. stycket. Den 1 november samma år erhöll han vinstutdelning på aktierna med 5 % och lyckades därefter redan samma dag sälja dem till 290 kr. stycket, varpå han omedelbart inlöste lånet. Hur mycket hade han i ren förtjänst på affären?
6. I en triangel ABC äro sidorna AB och BC lika stora. P är medelpunkten för den kring triangeln omskrivna cirkeln och Q medelpunkten för den i triangeln inskrivna cirkeln. Vinkeln PAQ är 6°. Beräkna triangelns vinklar.
7. Ett rektangelformigt jordområde, som på en karta i längdskalan 1 : 2000 har en längd av 7 cm och en bredd av 55 mm, skall uppdelas i 16 lika stora koloniträdgårdslotter. Hur stor blir varje sådan lott, om 20 % av området före uppdelningen avsättes till vägar?
8. På en metallplåt uppritas en regelbunden 6-hörning med sidan 10 cm. Hörnen sammanbindas med figurens mittpunkt, och därpå bortklippas av de uppkomna trianglarna två stycken, som ligga bredvid varandra. Den återstående figuren hopvikes längs de linjer, som gå till mittpunkten, så att ett ihåligt, pyramidformat kärl med kvadratisk basyta erhålles. Hur mycket rymmer detta kärl?

Resultat: **1.** $x = 2$. **2.** A, B och C erhålla resp. 5412 kr., 4838 kr. och 6150 kr. **3.** 100 m. **4.** 4 %. **5.** 663,75 kr. **6.** 56°; 56° och 68° eller 64°; 64° och 52°. **7.** 770 m². **8.** $\frac{100\sqrt{50}}{3} = 235{,}7$ cm³.